Notes - Funktionentheorie I

Vorlesung aus dem Sommersemester 2019 von Prof. Hartmut Führ
an der RWTH Aachen

Autor: Jannis Zeller

Letzte Änderung: 4. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

Disclaimer

Diese Zusammenfassung ist nicht offiziell von der RWTH Aachen oder Dozierenden der betreffenden Lehrveranstaltungen bestätigt oder erprobt. Sie wurde nach bestem Wissen und Gewissen erstellt.

1 Komplexe Differenzierbarkeit

1.1 Topologische Eigenschaften von $\mathbb{C}$

Definition 1.1. Zusammenhang und Wegzusammenhang. Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum.

a) $M \subset V$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu allen $a, b \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to V$ gibt mit $\gamma([0,1]) \subset M$, $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

b) $M \subset V$ heißt zusammehängend, wenn für jede Wahl von offenen (*Lemma:* abgeschlossenen) Mengen

$$U, U' \subset V \quad \text{mit} \quad U \cap U' \cap M = \emptyset \quad \text{und} \quad M \subset U \cup U'$$

bereits folgt

$$M \subset U \quad \text{oder} \quad M \subset U' .$$

In $\mathbb{R}$ sind gerade die leere Menge und die Intervalle zusammenhängend. Zudem sind in $\mathbb{R}$ Zusammenhang und Wegzusammenhang offenbar äquivalent.

Satz 1.1. *Bilder stetiger Funktionen.* *Seien $(V, ||\cdot||)$, $(V', ||\cdot||')$ normierte Vektorräume, $M \subset V$ und $f : M \to V'$ stetig.*

a) Ist M kompakt, so ist $f(M) \subset \mathbb{C}$ kompakt.

b) Ist M offen, so ist $f(M) \subset \mathbb{C}$ offen.

c) Ist M zusammenhängend, dann ist auch $f(M)$ zusammenhängend.

Dass zwei Mengen zusammenhängend sind, ist anhand der Definition häufig recht umständlich zu zeigen und auch anschaulich nicht direkt klar. Der Begriff des Wegzusammenhanges ist das anschaulich klare. Praktisch ist daher das folgende Lemma:

Lemma 1.1. *Aus Wegzusammenhang folgt Zusammenhang.* *Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Ist $M \subset V$ wegzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*

Beispiel 1.1. Ein Beispiel für eine zusammenhängende aber nicht wegzusammenhängende Menge ist:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ \sin(1/x) \end{pmatrix} ;\ x > 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} ;\ |y| \le 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Definition 1.2. Polygone. Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : [0,1] \to V$ heißt Polygon (oder Polygonzug), wenn es eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 <$

... $< t_n = 1,\ n \in \mathbb{N}$, von $[0,1]$ und Punkte $a_i, b_i \in V$ gibt, so dass gilt

$$\varphi(t) = a_i + tb_i \quad \text{für} \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad \text{und} \quad i = 1, \dots, n\,.$$

Ist $M \subset V$ und $\varphi([0,1]) \subset M$, so spricht man von einem *Polygon in M* mit *Anfangspunkt* $\varphi(0)$ und *Endpunkt* $\varphi(1)$.

Bei der Konstruktion eines Polygons ist im Wesentlichen die Stetigkeit an den Knickstellen zu beachten. Damit lässt sich eine weitere Beziehung zwischen zusammenhängenden und wegzusammenhängenden Mengen formulieren:

Satz 1.2. *Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vekotrraum. Für ein offenes $M \subset V$ sind dann äquivalent:*

(i) M ist ***zusammenhängend****.*

(ii) M ist ***wegzusammenhängend****.*

(iii) Zu allen $a, b \in M$ gibt es ein Polygon in M von a nach b.

Dies nutzt man, um einen Mengentyp zu charakterisieren, der die beiden Begriffe quasi zusammenfasst:

Definition 1.3. Gebiete und Konvexheit. Eine nicht-leere (weg-) zusammenhängende offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes $(V, ||\cdot||)$ nennt man Gebiet. Ein Teilmenge M von $\mathbb{C}$ heißt konvex, wenn für alle $a, b \in M$ die Verbindungsstrecke $\{a + s(b-a);\ 0 \leq s \leq 1\} \subset M$ ist.

Wegzusammenhangskomponenten

Definition 1.4. Wegzusammenhangskomponenten. Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $a \in M$. Dann heißt

$$W(a) = \{b \in M;\ \text{es gibt ein stetiges } \gamma : [0,1] \to M \ \text{ mit } \ \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\}$$

die Wegzusammenhangskomponente von a in M.

Die Wegzusammenhangskomponente zu a ist anschaulich die größtmögliche wegzusammenhängende Teilmenge von M die a enthält.

Satz 1.3. *Eigenschaften von WZKs.* *Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $a \in M$. Dann gilt:*

a) $W(a)$ ist wegzusammenhängend.

b) Ist N zusammenhängend mit $a \in N \subset M$, so gilt $N \subset W(a)$.

c) Ist $b \in M$, so gilt entweder $W(a) \cap W(b) = \emptyset$ oder $W(a) = W(b)$.

d) Ist M offen, so ist auch $W(a)$ offen, also ein Gebiet.

1.2 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 1.5. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Es seien V, W normierte Vektorräume, $U \subset V$ sowie $f_n : U \to W$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \to W$ Abbildungen.

a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (auf U) punktweise konvergent gegen f, wenn es zu jedem $x \in U$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon, x)$ gibt, so dass

$$||f_n(x) - f(x)|| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N\,.$$

b) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (auf U) gleichmäßig konvergent gegen f, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$||f_n(x) - f(x)|| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N \quad \text{und alle} \quad x \in U\,.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in U} ||f_n(x) - f(x)|| = 0\,.$$

Satz 1.4. *Weierstrasssches Majorantenkriterium.* *Seien V, W normierte Vektorräume, $U \subset V$, sowie $g_n : U \to W$ für $n \in \mathbb{N}$. Gibt es reelle Zahlen M_n, $n \in \mathbb{N}$, derart, dass $||g_n(x)|| \leq M_n$ für alle $x \in U$, $n \in \mathbb{N}$, und ist $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergent, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ gleichmäßig konvergent auf U.*

Definition 1.6. Konvergenzradius und Potenzreihen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in \mathbb{C}$ ist eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $R \in R^{\geq 0} \cup \{\infty\}$, mit der Eigenschaft, dass die Potenzreihe für alle $z \in K_R(z_0)$ absolut konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus K_R(z_0)$ divergiert.

Satz 1.5. *Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) ***Formel von Cauchy Hadamard:***

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{mit} \quad \infty^{-1} = 0 \quad \text{und} \quad 0^{-1} = \infty\,.$$

b) ***Quotientenformel:*** *Wenn ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0 \;\; \forall \;\; n \geq N$ existiert gilt:*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|\,.$$

Satz 1.6. *Eigenschaften von Potenzreihen.* *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in \mathbb{C}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt:*

a) Die Funktion $f : K_R(z_0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *definiert eine stetige und unendlich oft differenzierbare Funktion.*

b) Die Potenzreihe konvergiert für jedes $0 < \rho < R$ *gleichmäßig auf* $K_\rho(z_0)$.

Lokal gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

Satz 1.7. ***Stetigkeit der Grenzfunktion.*** *Es seien* V, W *normierte Vektorräume,* $U \subset V$ *sowie* $f_n : U \to W$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \to W$ *Abbildungen. Ist die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig konvergent gegen* f *und die Folgenglieder* f_n *stetig für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist auch* f *stetig.*

Satz 1.8. ***Lokal glm. Konvergenz.*** *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f_n : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ *Funktionen. Dann sind äquivalent:*

(i) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert lokal gleichmäßig, d.h. zu jedem* $a \in U$ *existiert ein* $r > 0$ *mit* $K_r(a) \subset U$, *sodass* f_n *auf* $K_r(a)$ *gleichmäßig konvergiert.*

(ii) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert auf jedem Kompaktum in* U *gleichmäßig.*

Satz 1.9. *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Funktionen* $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *und* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eine* ***stetige*** *Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert lokal gleichmäßig gegen* f.

(ii) Für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen, die gegen eine Zahl* $z \in \mathbb{C}$ *konvergieren gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z)\,.$$

Mit diesem Satz kann man auch die lokal gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge widerlegen:

Beispiel 1.2. Die Funktionenfolge

$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{nz} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}$$

konvergiert offensichtlich punktweise gegen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 0$. Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $z_n = 1/n$. Dann ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offensichtlich eine Nullfolge. Dabei gilt:

$$f_n(z_n) = 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1 \neq 0 = f(0)\,.$$

Somit kann f_n nicht lokal gleichmäßig und somit auch nicht gleichmäßig konvergieren.

1.3 Holomorphie

Definition 1.7. Komplexe Differenzierbarkeit. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt komplex differenzierbar in z_0, wenn es eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z) \quad \text{für alle } z \in U\,.$$

Es folgt sofort aus der Stetigkeit von Δ in z_0, dass aus komplexer Differenzierbarkeit auch Stetigkeit folgt.

Lemma 1.2. *Differenzenquotient.* *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist komplex differenzierbar in z_0.*

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ *existiert, d.h. es gibt ein $w \in \mathbb{C}$, so dass für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = w\,.$$

In diesem Fall gilt $w = \Delta(z_0)$.

Definition 1.8. Ableitung. Ist $U \in \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, so nennt man

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0) := f'(z_0) = \Delta(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

die Ableitung von f an der Stelle z_0. Ist f in allen Punkten $z \in U$ komplex differenzierbar, so heißt die Funktion

$$f' : U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f'(z),$$

die Ableitung von f.

Definition 1.9. Holomorphie. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in z_0, wenn f in einer Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist. Man nennt $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, wenn f in allen Punkten $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist. Mit

$$\mathcal{H}(U) := \{f : U \to \mathbb{C};\quad f \text{ holomorph}\}$$

bezeichnen wir die Menge der holomorphen Funktionen auf U. Eine ***ganze Funktion*** ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, also ein Element von $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Definition 1.10. Biholomorphie. Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to V$ heißt biholomorph, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} holomorph sind. Man nennt f lokal biholomorph auf U, wenn es zu jedem $z_0 \in U$ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z_0 und ein offenes $\tilde{V} \subset V$ gibt, so dass $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ biholomorph ist.

Satz 1.10. *Ableitung der Umkehrfunktion.* *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen. Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) f ist biholomorph.

(ii) f ist bijektiv und holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und f^{-1} ist stetig. Dann gilt:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \, .$$

Zudem gilt (erst nächste Kapitel):

a) Ist U ein Gebiet und f injektiv, so ist f biholomorph.

b) f ist genau dann lokal biholomorph, wenn $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ ist.

1.4 Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Es werden die Darstellungen

$$z = x + \mathrm{i} \cdot y \quad \text{und} \quad f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i} \cdot v(x, y)$$

verwendet.

Definition 1.11. Relle Differenzierbarkeit. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\tilde{U} := \{\bar{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, z = x + iy \in U\} \subset \mathbb{R}^2$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Man nennt f reell differenzierbar in $z_0 \in U$, wenn $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ total differenzierbar, d.h. stetig partiell differenzierbar in $\tilde{z}_0$ ist.

Dazu muss eine reelle 2×2-Matrix T und ein stetiges $\varphi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(x_0, y_0) = 0$ geben, die

$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x_0, y_0) + T \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|_2 \cdot \varphi(x, y)$$

mit $T := Df$, erfüllen.

Lemma 1.3. *$\mathbb{C}$-Linearität.* *Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ werde bezüglich der Basis $(1, \mathrm{i})$ durch die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Diese Abbildung ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{und} \quad a_{12} = -a_{21}\,.$$

Satz 1.11. *Cauchy-Riemann DGL.* *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ gegeben in der Darstellung von oben. Dann sind äquivalent*

(i) *f ist in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar*

(ii) *f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)\,.$$

Dann gilt insbesondere

$$f' = f_x = -if_y\,.$$

Satz 1.12. *Rechentricks.* *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.*

a) *Gilt $f' \equiv 0$, so ist f konstant.*

b) *Ist $\operatorname{Re}(f)$ konstant oder $\operatorname{Im}(f)$ konstant, so ist f konstant.*

c) *Ist $|f|$ konstant, so ist f konstant.*

d) *Es gilt:*

$$\det(D\tilde{f})(\tilde{z}_0) = |f'(z_0)|^2\,.$$

e) *Sei $G = \mathbb{C}$. Existiert eine total differenzierbare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{D}\varphi(x, y) \neq (0, 0)$ f.a. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und der Eigenschaft*

$$\varphi(\operatorname{Re}(f(z)), \operatorname{Im}(f(z))) = 0 \quad \text{f.a.} \quad z \in \mathbb{C}$$

so ist f bereits konstant.

f) *Gesucht sind alle ganzen Funktionen mit **vorgegebenem Realteil** (Imaginärteil), der in der Form $u(x, y)$ $(v(x, y))$ gegeben ist. Kann man eine Funktion raten, die gesuchten Realteil (Imaginärteil) besitzt, so folgt aus b), dass die gesuchten Funktionen bereits bis auf eine eindeutige Konstante aus $\mathrm{i}\mathbb{R}$ $(\mathbb{R})$ durch die Geratene festgelegt ist.*

Nützlich ist Punkt e) z.B. für vorgegebene Zusammenhänge wie $\operatorname{Re}(f(z))^s = \operatorname{Im}((f(z))$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Dann wähle $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^s - y$, denn dann ist $\mathrm{D}\varphi(x, y) = (sx^{s-1}, -1) \neq (0, 0)$ f.a. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ aber offenbar $\varphi(\operatorname{Re}(f(z)), \operatorname{Im}(f(z))) = 0$ f.a. $z \in \mathbb{C}$.

1.5 Elementare Funktionen

Satz 1.13. ***Holomorphie von Potenzreihen.*** *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a und Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion $f : K_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph mit*

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{k+1} (z-a)^k .$$

Definition 1.12. **Argumentfunktion und Log.** Die Abbildung

$$\arg : \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0 \to (-\pi, \pi],\ z \mapsto \arg z$$

heißt Haupt-Argumentfunktion. Man nennt die Abbildung

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ z \mapsto \ln(|z|) + \mathrm{i} \arg(z)\,,$$

den Hauptzweig des Logarithmus, wobei $\ln(\cdot)$ der reelle Logarithmus ist.

Satz 1.14. a) *Für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt*

$$\exp(\mathrm{Log}\, z) = z\,.$$

b) *Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\mathrm{Log}(\exp z) = z + 2\pi \mathrm{i} k\,.$$

c) *Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$, gilt*

$$\mathrm{Log}\, a = \ln a\,.$$

d) *Für $z \in \mathbb{C}^*$ und $w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(w) = z$ genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit*

$$w = \mathrm{Log}\, z + 2\pi \mathrm{i} k\,.$$

e) *Zu $z, w \in \mathbb{C}^*$ gibt es ein $k \in \{-1, 0, 1\}$ mit*

$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w + 2\pi \mathrm{i} k\,.$$

f) Log *ist genau auf der* ***Schlitzebene*** $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 0\}$ ***stetig****.*

g) $\mathrm{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ *ist (genau auf der Schlitzebene)* ***holomorph*** *mit* $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$.

Satz 1.15. a) *Für festes $a \in \mathbb{C}^*$ ist die* ***Exponentialfunktion***

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto a^z\,,$$

eine ganze Funktion mit der Ableitung $z \mapsto a^z \cdot \operatorname{Log} a$ und der Eigenschaft

$$a^{z+w} = a^z \cdot a^w \;\forall\; z, w \in \mathbb{C}\,.$$

b) *Für ein festes $z \in \mathbb{C}$ ist die **Potenzfunktion***

$$\mathbb{C}_- \to \mathbb{C},\;\; a \mapsto a^z\,,$$

holomorph mit der Ableitung $a \mapsto z \cdot a^{z-1}$.

Insbesondere gilt

$$\operatorname{Log} \bar{z} = \overline{\operatorname{Log} z} \qquad \text{und} \qquad (a^z)^w \overset{\text{i. Alg.}}{\neq} a^{zw}\,, \quad a^z \cdot b^z \overset{\text{i. Alg.}}{\neq} (ab)^z\,.$$

2 Kurvenintegrale

2.1 „Gewöhnliche“ Integrale über $\mathbb{C}$

Definition 2.1. Stückweise Stetigkeit. Wir nennen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gibt, sodass $f|_{(t_{j-1}, t_j)}$ stetig ist und die Limiten

$$\lim_{t \searrow t_{j-1}} f(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \nearrow t_{j-1}} f(t) \quad \text{für } j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$$

existieren. Eine Funktion heißt ***stückweise stetig differenzierbar***, wenn dasselbe auch für die Ableitung gilt.

Über stückweise stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ lassen sich nun Integrale definieren.

Definition 2.2. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion, so definiert man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\;\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))\;\mathrm{d}t \;\; \in \mathbb{C}\,.$$

Dieses Integral erfüllt alle gewöhnlichen Eigenschaften reeller Integrale, was sich zum Großteil auch durch deren Eigenschaften zeigen lässt.

2.2 Wege und Kurvenintegrale

Definition 2.3. Wege in $\mathbb{C}$. Sei $U \subset \mathbb{C}$. Ein Weg in U ist eine ***stetige, stückweise stetig differenzierbare*** Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset U$. Man nennt $\operatorname{Sp}(\gamma) := \gamma([a, b])$ die ***Spur*** von γ.

a) $\gamma(a)$ heißt Anfangs- und $\gamma(b)$ heißt Endpunkt des Weges und γ ist ein Weg von a nach b. Man nennt γ geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

b) Die ***Länge des Weges*** γ ist

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \, .$$

c) Man nennt γ ***glatt***, wenn γ stetig differenzierbar ist und $\gamma'(t) \neq 0 \; \forall \; t \in [a,b]$.

d) Tritt $M \subset \mathbb{C}$ als Spur eines Weges γ auf, so sagt man, dass M von γ ***parameterisiert*** wird.

e) Der zu γ ***entgegengesetzter Weg*** ist

$$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}, \; t \mapsto \gamma(a+b-t) \, .$$

f) Ist $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\gamma(b) = \sigma(c)$, so nennt man

$$\gamma \oplus \sigma : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}, \; t \mapsto \begin{cases} \gamma(t), & \text{falls } t \in [a,b] \\ \sigma(t+c-b), & \text{falls } t \in [b, b+d-c], \end{cases}$$

den ***zusammengesetzten Weg***.

Definition 2.4. Kurvenintegrale. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f : \mathrm{Sp}\,(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann definiert man das Kurvenintegral von f längs γ durch:

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Definition 2.5. Parametertransformationen. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Eine surjektive, stetige, stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ nennt man eine Parametertransformation, wenn $\varphi'(t) \geq 0$ für alle t, in denen φ differenzierbar ist, und in den Zerlegungsstellen von φ' die einseitigen Ableitungen von φ positiv sind. Dann nennt man $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ eine ***Umparametrisierung*** von γ.

Satz 2.1. *Eigenschaften von Wegintegralen.* *Sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$ und seien $f, g : \mathrm{Sp}\,(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:*

a) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z)) \, \mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z + \beta \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \, .$$

b) *Es gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \mathrm{Sp}(\gamma)} f(z) \, .$$

c) *Ist* γ^* *eine Umparametrisierung von* γ*, so gilt*

$$\int_{\gamma^*} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

d) *Es gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

e) *Entsteht* γ *durch Zusammensetzung von* $\gamma_i,\ i \in [1,n] \cap \mathbb{N}$*, so gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

2.3 Stammfunktion

Definition 2.6. Stammfunktionen. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f, wenn F holomorph ist und $F' = f$ erfüllt. Man sagt, dass f ***lokal eine Stammfunktion*** auf U hat, wenn es zu jedem Punkt $a \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von a gibt, so dass $f|_V$ eine Stammfunktion besitzt.

Satz 2.2. ***Hauptsatz für Wegintegrale.*** *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion* F *besitzt. Sei* γ *ein Weg in* U *mit Anfangspunkt* z_0 *und Endpunkt* z_1*. Dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0)\,.$$

Insbesondere gilt für jeden geschlossenen Weg δ *in* U*:*

$$\int_\delta f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Insbesondere zeigen Beispiele, wie $f(z) = |z|$, dass im Komplexen **nicht jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt.** Zudem muss auf die Wege geachtet werden, da z.B. $1/z$ über den Einheitskreis integriert $2\pi \neq 0$ ergibt obwohl $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$. Das liegt daran, dass Log nur auf $\mathbb{C}_-$ holomorph ist und der Einheitskreis nicht in $\mathbb{C}_-$ liegt. Es gelten ähnliche Zusammenhänge wie bei Kurvenintegralen im $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.3. *Sei* $G \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $f : G \to \mathbb{C}$ *stetig. Wenn*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ *in* G *gilt, dann hat* f *eine Stammfunktion* F *auf* G*, nämlich*

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w\,,$$

wenn γ_z ein beliebiger Weg in G von einem festen Punkt $a \in G$ nach $z \in G$ ist. Ist G sternförmig bezüglich des Punktes a, so kann man insbesondere $\gamma_z := [a, z]$ wählen. Ist G konvex, so kann man insbesondere a beliebig wählen.

Satz 2.4. ***Beschränkung auf Dreiecke.*** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann besitzt f genau dann eine Stammfunktion, wenn für jede ganz in G gelegene, abgeschlossene Dreiecksfläche Δ gilt:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

2.4 Vertauschung von Grenzprozessen

Satz 2.5. ***Grenzwert und Integral.*** *Sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \mathrm{Sp}\,(\gamma) \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathrm{Sp}\,(\gamma) \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Man beachte, dass aufgrund von Satz 1.7 auch $f(z)$ stetig ist und dies hier nicht als Voraussetzung gesetzt werden muss. Mit der Linearität des Kurvenintegrals lässt sich dies auch auf gleichmäßig konvergente Funktionenreihen übertragen:

Lemma 2.1. ***Reihen und Integral.*** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, γ ein Weg in U und $f_n : U \to \mathbb{C}$ stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ auf U lokal gleichmäßig konvergiert, dann gilt*

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^\infty f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Satz 2.6. ***Parameterintegrale.*** *Sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathrm{Sp}\,(\gamma) \times M \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

a) *Die Funktion*

$$F : M \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \int_\gamma f(w, x)\,\mathrm{d}w$$

ist stetig.

b) *Hat f eine auf $\mathrm{Sp}\,(\gamma) \times M$ stetige partielle Ableitung $\partial_{x_j} f(w, x)$, $j \in \mathbb{N}$, so ist $F(x)$ nach x_j stetig partiell differenzierbar mit*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_j}(w, x)\,\mathrm{d}w\,.$$

c) *Ist $M \subset \mathbb{C}$ offen und $f(w, z)$ für jedes $w \in \mathrm{Sp}\,(\gamma)$ nach z komplex differenzierbar* *mit auf* $\mathrm{Sp}(\gamma) \times M$ *stetiger Ableitung* $f_z(w,z)$*, so ist*

$$F : M \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_\gamma f(w,z)\,\mathrm{d}w$$

holomorph mit

$$F'(z) = \int_\gamma f_z(w,z)\,\mathrm{d}w\,.$$

Man beweist *a*) und *b*) indem man die Parametrisierung für γ einsetzt und die Regeln von reellen Parameterintegralen überträgt. Für *c*) bleiben somit die Cauchy-Riemann DGLs zu überprüfen. Dazu parametrisiert man $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \gamma_1(t) + \mathrm{i}\gamma_2(t)$.
Für stetige Funktionen lässt sich wie im reellen die Integrationsreihenfolge tauschen:

Satz 2.7. ***Integrationsreihenfolge.*** *Seien* α *und* β *Wege in* $\mathbb{C}$ *und* $f : \mathrm{Sp}(\alpha) \times \mathrm{Sp}(\beta) \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_\alpha \left(\int_\beta f(z,w)\,\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z = \int_\beta \left(\int_\alpha f(z,w)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}w\,.$$

Auch hier führt man im Beweis die Aussage durch einsetzten der Parametrisierungen von α und β auf reelle Integrale zurück und nutzt den Satz von Fubini[1].

3 Holomorphe Funktionen

Im Reellen existieren sowohl Funktionen, die nur einmal differenzierbar sind, ihre Ableitungen es aber nicht sind (z.B. $x\,|x|$), und ebenfalls Funktionen, die zwar beliebig oft differenzierbar sind, deren Potenzreihe aber überall verschwindet, wie z.B.

$$x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Im Komplexen wird sich herausstellen, dass es solche Fälle nicht gibt.

3.1 Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete

Grundlegend für dieses Kapitel ist der

Satz 3.1. ***von Goursat.*** *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph in* $U \setminus \{z_0\}$ *und stetig in* z_0*. Dann gilt für jede abgeschlossene, ganz in* U *gelegene Dreiecksfläche* Δ

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

[1]Dieser Satz gilt eigentlich nur für das Lebesgue Integral, das aber auf Kompakta mit dem Riemann Integral übereinstimmt.

Satz 3.2. *Cauchy-Integralsatz für konvexe Gebiete.* *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die mit eventueller Ausnahme eines Punktes holomorph ist. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in G*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

3.2 Die Cauchyschen Integralformeln

Satz 3.3. *Cauchysche Integralformel.* *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt für jedes $z \in K_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Dies lässt sich durch Konstruktion des Differenzenquotienten von f, der mittels der Ableitung holomorph fortgesetzt wird zeigen.
Der rechts stehende Integrand ist nun wieder holomorph und wegen Satz 2.6 c) folgt iterativ:

Satz 3.4. *Holomorphie der Ableitungen.* *Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar. Jede Ableitung ist wieder holomorph.*

Satz 3.5. *Cauchysche Integralformel für Ableitungen.* *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in K_r(z_0)$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial K(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Insbesondere folgt, wenn f eine holomorphe Stammfunktion besitzt, dass auch f wieder holomorph ist:

Satz 3.6. *von Morera.* *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. f ist genau dann holomorph, wenn für jede abgeschlossene, ganz in U gelegene Dreiecksfläche Δ gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

3.3 Der Riemannsche Hebbarkeitssatz

Definition 3.1. Diskrete Mengen. Sei $G \subset \mathbb{C}$ und $M \subset G$. Man nennt M diskret in G, wenn es zu jedem $z \in G$ ein $r > 0$ gibt, mit

$$M \cap K_r(z) \subset \{z\}\,.$$

Das bedeutet, zwischen zwei Punkten in M liegen beliebig viele Punkte in G. Insbesondere besitzt die Menge M dann **keine Häufungspunkte** in G. Insbesondere ist $G \backslash M$ ***immer noch offen***. Damit lässt sich zeigen:

Satz 3.7. ***Riemannscher Hebbarkeitssatz.*** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

(i) $\lim_{z \to z_0} f(z) = c$ *existiert in* $\mathbb{C}$.

(ii) Es gibt eine stetige Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g|_{U\setminus\{z_0\}} = f$.

(iii) Es gibt eine holomorphe Funktion $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_{U\setminus\{z_0\}} = f$.

(iv) Es gibt ein $r > 0$ mit $K_r(z_0) \subset U$, so dass f auf $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.

In diesem Fall sind die Fortsetzungen eindeutig bestimmt mit:

$$c = g(z_0) = \hat{f}(z_0)\,.$$

Im Reellen zeigt $|x|$, dass stetige und differenzierbare Ergänzbarkeit nicht äquivalent sind. Mittels der Satzes von Morera kann man den Riemannschen Hebbarkeitssatz auch auf „**1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten**“ in $\mathbb{C}$ erweitern (vgl. Skrip, S. 104). Diese dürfen allerdings nicht geschlossen sein (man nehme ein geschlossenes Dreieck).

3.4 Potenzreihenentwicklung

Satz 3.8. ***Taylor-Reihe.*** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $R = \sup\{r > 0; K_r(z_0) \subset U\} \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$ (echt positive reelle Zahlen mit ∞). Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist f um z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar mit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n\,.$$

Diese Taylor-Reihe von f konvergiert mindestens auf $K_R(z_0)$ lokal gleichmäßig gegen f.

Man kann die Koeffizienten auch mittels Satz 3.5 bestimmen und dies wird auch im Beweis verwendet. Damit ist ein weiterer wesentlicher Unterschied zum reellen (Beispiel oben) gegeben. Insbesondere kann man bei, durch Potenzreihen gegebenen Funktionen, den **Entwicklungspunkt in Vereinbarung mit dem Konvergenzradius wechseln**. Potenzreihen lassen sich aber **außerhalb ihres Konvergenzkreises nicht holomorph fortsetzten**, denn sonst wäre der Konvergenzradius automatisch größer, da die holomorphe Fortsetzung wieder in eine Potenzreihe entwickelbar wäre.

Beispiel 3.1. Hilfreich zum Ausrechnen von Potenzreihen sind geometrische Reihen. So kann man z.B. die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (1 + z^2)^{-1}$ mittels ***geometrischer Reihen*** leicht um den Punkt 1 entwickeln:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(z-1)-(\mathrm{i}-1)} - \frac{1}{(z-)-(-\mathrm{i}-1)}\right)$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{\mathrm{i}-1}\right)^n - \frac{1}{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{-\mathrm{i}-1}\right)^n\,.$$

Satz 3.9. ***Partialbruchzerlegung.*** *Es seien $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome und es sei Q in der Darstellung*

$$Q(z) = \prod_{i=1}^{N} (x - a_i)^{r_i}$$

mit paarweise verschiedenen $a_i \in \mathbb{C}$ und $r_i \in \mathbb{N},\ i \in \{1, ..., N\}$. Dann gibt es ein Polynom $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{C},\ i \in \{1, ..., N\},\ j \in \{1, ..., r_i\}$ mit

$$\frac{P}{Q} = H + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{c_{ij}}{(z - a_i)^j}\,.$$

Man bestimmt die Koeffizienten c_{ij} durch Ausmultiplizieren und anschließendem Koeffizientenvergleich. Ist $\deg(P) < \deg(Q)$ ist $H \equiv 0$.

Satz 3.10. ***Äquivalenzsatz für Holomorphie.*** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist holomorph.*

(ii) *f besitzt lokal eine Stammfunktion.*

(iii) *f ist stetig und für jede abgeschlossene, ganz in U gelgene Dreiecksfläche Δ gilt:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

(iv) *f ist stetig und für jedes $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subset U$ gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \quad \textit{für alle} \quad z \in K_r(z_0)\,.$$

(v) *f ist reell (total) differenzierbar und genügt auf U den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.*

(vi) *f ist um jeden Punkt $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickelbar.*

3.5 Identitätssatz

Definition 3.2. Nullstellen. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Man sagt, dass f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ hat, wenn

$$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \qquad f^{(n)}(z_0) \neq 0\,.$$

Für $w \in \mathbb{C}$ sagt man allgemeiner, dass f in z_0 eine **w-*Stelle der Ordnung / Vielfachheit*** $n \in \mathbb{N}$ hat, oder dass f in z_0 den Wert w mit der Ordnung n annimmt, wenn $z \mapsto f(z) - w$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n hat. f hat in z_0 eine ***Nullstelle der Ordnung*** ∞, wenn $f^{(k)}(z_0) = 0$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 3.1. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

(i) *f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n bzw. keine Nullstelle, falls $n = 0$.*

(ii) *Die Potenzreihenentwicklung von f um z_0 hat die Form*

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_n \neq 0\,.$$

(iii) *Es gibt ein $r > 0$ und eine holomorphe Funktion $g : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z) \quad \text{für alle} \quad z \in K_r(z_0) \cap U \quad \text{und} \quad g(z_0) \neq 0\,.$$

Satz 3.11. ***Identitätssatz.*** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f \equiv 0$.*

(ii) *f hat in G eine Nullstelle der Ordnung ∞.*

(iii) *Es gibt eine in G nicht-diskrete Teilmenge $N \subset G$ mit*

$$f(z) = 0 \quad \forall \quad z \in N\,,$$

d.h. die Nullstellenmenge von f hat einen Häufungspunkt in G.

Lemma 3.2. *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f = g$.*

(ii) *Es gibt ein $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

(iii) *Die Menge $\{z \in G; f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in G.*

3.6 Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen

Aus dem Cauchyschen Integralsatz lässt sich mittels Standardabschätzungen zeigen:

Satz 3.12. ***Cauchysche Ungleichungen.*** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $K_r(z_0) \subset U$. Dann gilf für alle $0 < \rho \leq r$*

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{r}{\rho} \cdot \frac{n!}{\rho^n} \cdot \max\{|f(\xi)|\,;\ \xi \in \partial K_r(z_0)\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle z mit $|z - z_0| \leq r - \rho$.

Angewandt auf Potenzreihen im Spezialfall $\rho = r$ erhält man:

Lemma 3.3. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt für $0 < r < R$ und $n \in \mathbb{N}_0$*

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \max\{|f(\xi)|\,;\ |\xi - z_0| = r\}\,.$$

Für Polynome vom Grad n erhält man

$$\frac{1}{2}\,|a_n| \cdot |z|^n \leq |p(z)| \leq 2\,|a_n| \cdot |z|^n$$

Satz 3.13. ***Fundamentalsatz der Algebra.*** *Sei*

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \ \in\ \mathbb{C}[z]$$

ein nicht konstantes Polynom vom Grad n.

a) $p(z)$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

b) Es gibt $b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - b_j)\,.$$

Da für jedes $c \in \mathbb{C}$ und ein Polynom $p(z)$ auch $p(z) - c$ ein Polynom ist folgert man einfach aus a):

Lemma 3.4. *Sei $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein nicht konstantes Polynom. Dann nimmt p als Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jeden Wert in $\mathbb{C}$ an.*

Satz 3.14. *Sei f eine ganze Funktion, zu der es $s, M, R \in \mathbb{R}_+$ gibt mit der Eigenschaft*

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^s \quad \text{für alle} \quad |z| \geq R\,.$$

Dann ist f ein Polynom von einem Grad $\leq s$.

Das Fall $s = 0$ liefert:

Satz 3.15. ***von Liouville.*** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Satz 3.16. ***von Casorati-Weierstrass für ganze Funktionen.*** *Sei f eine ganze Funktion, die kein Polynom ist. Dann gibt es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ mit* *den Eigenschaften:*

$$|z_k| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{und} \quad f(z_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w\,.$$

Das bedeutet, dass, wenn f ganz und kein Polynom ist für alle $R > 0$ gilt: $F(\mathbb{C}\setminus K_R(0)) \subset \mathbb{C}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

Satz 3.17. ***von Picard (klein).*** *Eine nicht-konstante ganze Funktion f nimmt jeden Wert in $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.*

Satz 3.18. *Sei f eine ganze Funktion, zu der es ein $s \in R_+$, sowie $M, R \in R_+^*$ gibt, mit der Eigenschaft*

$$|f(z)| \geq M \cdot |z|^s \quad \textit{für alle} \quad |z| \geq R\,.$$

Dann ist f ein Polynom von einem Grad $\geq s$.

Satz 3.19. ***von der Gebietstreue.*** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante, holomorphe Funktion. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Satz 3.20. ***vom Maximum-Prinzip.*** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.*

a) *Wenn $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum annimmt, dann ist f konstant.*

b) *Wenn G beschränkt ist und f stetig auf $\overline{G}$ fortgesetzt werden kann, dann nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand ∂G an:*

$$|f(z)| \leq \max\{|f(\xi|\,;\ \xi \in \partial G\} \quad \textit{für alle} \quad z \in G\,.$$

Satz 3.21. ***vom Minimum-Prinzip.*** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.*

a) *Wenn $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Minimum annimmt, so gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.*

b) *Wenn G beschränkt ist und f stetig auf $\overline{G}$ fortgesetzt werden kann, so hat f in G eine Nullstelle oder die Funktion $|f|$ nimmt ihr Minimum auf dem Rand ∂G an:*

$$|f(z)| \geq \min\{|f(\xi|\,;\ \xi \in \partial G\} \quad \textit{für alle} \quad z \in G\,.$$

3.7 Folgen holomorpher Funktionen

Satz 3.22. *von Weierstrass.* *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ kovergiere lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f ebenfalls holomorph und für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Funktionenfolge $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$ der k-ten Ableitung ebenfalls lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$.*

Weiter kann man auch bei der Betrachtung uneigentlicher Integrale Aussagen über die Vertauschung von Grenzprozessen treffen:

Satz 3.23. *Uneigentliche Parameterintegrale.* *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$. Ist die Funktion $f : U \times (a, b) \to \mathbb{C}$ stetig und existiert eine Funktion $M : (a, b) \to \mathbb{R}$, so dass*

$$|f(z,t)| \leq M(t) \quad \textit{für alle} \quad (z,t) \in U \times (a,b)$$

und das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b M(t)\,\mathrm{d}t$ existiert, dann ist auch die Funktion

$$F : U \to \mathbb{C},\ z \mapsto \int_a^b f(z,t)\,\mathrm{d}t$$

stetig. Ist die Funktion $U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z,t)$, für jedes $t \in (a,b)$ darüber hinaus holomorph und ist $\partial_z f$ stetig, so ist auch F holomorph mit

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

4 Einfach zusammenhängende Gebiete

4.1 Umlaufzahlen

Definition 4.1. Ketten und Zykel. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Kette Γ in U ist eine Abbildung der Menge der Wege in U mit Werten in $\mathbb{Z}$, die nur endlich vielen Wegen einen Wert ungleich 0 zuordnet. Wir schreiben dafür:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j\gamma_j\,, \quad n_j \in \mathbb{Z}\,, \quad \gamma_j \text{ Weg in } U \ \ \forall \ \ j = 1, ..., r\,,$$

und nennen n_j die ***Vielfachheit*** des Weges γ_j. Eine Kette heißt Zyklus in U, wenn jedes $z \in U$ unter Berücksichtigung der Vielfachheiten n_j gleich oft als Anfangs- und Endpunkt auftritt, d.h. für $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, $j = 1, ..., r$, gilt

$$\sum_{j:\,\gamma_j(a_j)=z} n_j = \sum_{k:\,\gamma_k(b_k)=z} n_k\,, \quad \forall \ \ z \in U\,.$$

Die ***Spur*** von Γ ist definiert als:

$$\mathrm{Sp}\,(\Gamma) := \bigcup_{j:n_j\neq 0} \mathrm{Sp}\,(\gamma_j) \subset U\,.$$

Aus den Teilwegen γ_j eines Zyklus kann man durch eine spezielle Anordnung der Wege offenbar immer einen Zusammengesetzten Weg erzeugen, der geschlossen ist. Umgekehrt ist offenbar **jeder Zusammengesetzte Weg ein Zyklus**.

Definition 4.2. Ist $\Gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j\gamma_j$ eine Kette und $f : \mathrm{Sp}\,(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig, so definiert man das ***Integral von f längs*** Γ durch

$$\sum_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^{r} n_j \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Daraus folgt eine weitere Charakterisierung der Existenz von Stammfunktionen, bzw. der Holomorphie:

Satz 4.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(i) f besitzt eine Stammfunktion.

*(ii) Für **jeden Zyklus** Γ in U gilt:*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Für Zyklen, das heißt letzten Endes Mengen von Wegstücken, die sich zu endlich vielen geschlossenen Wegen zusammensetzten lassen definiert man:

Definition 4.3. Umlaufzahlen. Sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{Sp}\,(\Gamma)$. Dann heißt

$$n_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

die Umlauf- oder Windungszahl von Γ bezüglich z.

Die Definitionen implizieren für zwei Zyklen Γ_1 und Γ_2 sofort:

$$\begin{aligned} n_{\Gamma_1+\Gamma_2}(z) &= n_{\Gamma_1}(z) + n_{\Gamma_2}(z) && \text{für } z \notin \mathrm{Sp}\,(\Gamma_1) \cup \mathrm{Sp}\,(\Gamma_2) \\ n_{-\Gamma_1}(z) &= -n_{\Gamma_1}(z) && \text{für } z \notin \mathrm{Sp}\,(\Gamma_1)\ . \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition mit dem umgangssprachlichen / bildlichen Verständnis übereinstimmt:

Satz 4.2. *Sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Dann gilt*

$$n_\Gamma(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,(\Gamma)\ .$$

Es zeigt sich, dass für einen Zyklus Γ die Menge $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,(\Gamma)$ offen ist und in **Wegzusammenhangskomponenten** zerfällt. Von diesen ist **genau eine unbeschränkt**.

Satz 4.3. *Ist Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$, so ist $n_\Gamma(z)$* ***konstant*** *auf jeder Wegzusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,(\Gamma)$ und $n_\Gamma = 0$ auf der (einen) Unbeschränkten.*

4.2 Allgemeine Cauchysche Integralformeln

Mithilfe der Umlaufzahlen können die Cauchyschen Integralformeln auch für allgemeinere Wege angegeben werden. Dafür benötigt man noch einen Begriff für die Situation, „dass ein Zyklus einen (bzw. mehrere) Punkt(e) nicht umrundet“:

Satz 4.4. ***Homologie.*** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und Γ ein Zyklus in U. Man nennt Γ nullhomolog in U, wenn*

$$n_\Gamma(z) = 0 \quad \forall \quad z \in \mathbb{C} \setminus U\,.$$

Zwei Zyklen Γ_1 und Γ_2 heißen homolog in U, wenn $\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog in U ist.

Dann kann man formulieren:

Satz 4.5. ***Allgemeine/r Cauchysche/r Integralsatz/-formeln.*** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden* ***nullhomologen Zyklus*** *Γ in U:*

a) $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in U \setminus \mathrm{Sp}\,(\Gamma)$ gilt:

$$n_\Gamma(z) \cdot f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Dabei gestaltet sich der Beweis von *b)* kompliziert. Teil *a)* folgt aber einfach durch Anwendung von *b)* auf $F(\zeta) = f(\zeta)(\zeta - z)$. Aus der Anwendung von *a)* auf die Differenz homologer zweier Zyklen ergibt sich sofort:

Lemma 4.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für zwei* ***homologe*** *Zyklen Γ_1 und Γ_2 in U:*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

4.3 Einfach zusammenhängende Gebiete

Definition 4.4. Einfacher Zusammenhang. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder Zyklus nullhomolog in G ist.

Anschaulich hat G „keine Löcher“. Ein Zyklus in G kann also keinen Punkt in $\mathbb{C} \setminus G$ umlaufen.

Satz 4.6. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $K \neq \emptyset$* ***kompakt*** *mit $K \subset U$. Dann existiert ein*

Zyklus Γ in $U \setminus K$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} n_\Gamma(z) &= 1 \quad \forall \quad z \in K \\ n_\Gamma(z) &= 0 \quad \forall \quad z \in \mathbb{C} \setminus K\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $U \setminus K$ nicht einfach zusammenhängend.

Lemma 4.2. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sodass $\mathbb{C} \setminus G$ wegzusammenhängend und unbeschränkt ist. Dann ist G einfach zusammenhängend.*

Satz 4.7. *Äquivalenzsatz für einfach zusammenhängende Gebiete.* *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *G ist einfach zusammenhängend.*

(ii) *Jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion.*

(iii) *Für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und jeden Zyklus Γ in G gilt:*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

(iv) *Für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und jeden Zyklus Γ in G gilt*

$$n_\Gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad \forall \quad z \in G \setminus \mathrm{Sp}\,(\Gamma)\,.$$

(v) *Für jeden Zyklus Γ in G ist das sog.* ***Innere von*** *Γ $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,(\Gamma)\,;\; n_\Gamma(z) \neq 0\}$ eine Teilmenge von G.*

(vi) *(Mit dem nächsten Abschnitt:) Jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ohne Nullstellen besitzt einen komplexen Logarithmus, d.h., es gibt eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit*

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \textit{für alle } z \in G.$$

(vii) *Gilt $\mathbb{C} \setminus G = K \cup A$, wobei K kompakt und A abgeschlossen ist mit $K \cap A = \emptyset$, so gilt $K = \emptyset$.*

(viii) *(Abschnitt 7) $G = \mathbb{C}$ oder G ist biholomorph äquivalent zum Einheitskreis.*

Lemma 4.3. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

a) *Ist $G^* \subset \mathbb{C}$ und $f : G \to G^*$ biholomorph, so ist G^* auch ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

b) *Sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ topologisch, d.h. bijektiv und φ, φ^{-1} stetig. Dann ist $G^* = \varphi(G)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

Die Holomorphie einer Funktion reicht allerdings weder aus um einfach zusammenhängende Gebiete sicher auf einfach zusammenhängende Gebiete abzubilden, noch um sicher nur einfach zusammenhängende Urbilder einfach zusammenhängender Gebiete zu garantieren. Dazu die folgenden Gegenbeispiele:

a) Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto \exp(z)$ bildet das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathbb{C}$ auf das nicht einfach zusammenhängende Gebiet $\mathbb{C}^*$ ab.

b) Die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2 - 1$ bildet das nicht einfach zusammenhängende Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ auf das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathbb{C}$ ab. Dazu verwende, dass jedes Polynom $\mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$ abbildet (Lemma 3.4). Schließt man hier 1 aus dem Definitionsbereich aus, so wird der Funktionswert $f(1) = 0$ aber auch für $z = -1$ angenommen. Also bleibt das Bild ganz $\mathbb{C}$.

4.4 Zweige des Logarithmus

Definition 4.5. Zweige des Logarithmus. Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Ein Zweig des Logarithmus auf G ist eine ***stetige*** Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$e^{f(z)} = z \quad \text{für alle } z \in G\,.$$

Aufgrund der Eigenschaften der Exponentialfunktion ist solch ein Zweig immer bijektiv.

Satz 4.8. *Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus auf G. Dann ist f holomorph mit der Eigenschaft*

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in G.$$

Satz 4.9. *Äquivalenzsatz für den Logarithmus.* *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ sind äquivalent:*

(i) *Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus.*

(ii) *Die Funktion $G \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ hat eine Stammfunktion.*

(iii) *Für jeden Zyklus Γ in G gilt $n_\Gamma(0) = 0$.*

In diesem Fall wird für $a \in G$ ein Zweig des Logarithmus gegeben durch

$$G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \mathrm{Log}(a) + \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta}\, \mathrm{d}\zeta\,,$$

wobei γ_z ein beliebiger Weg von a nach z ist.

Lemma 4.4. *Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und f ein Zweig des Logarithmus auf G. Eine Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ ist genau ein Zweig des Logarithmus, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass*

$$g(z) = f(z) + 2\pi \mathrm{i}k \quad \textit{für alle } z \in G\,.$$

Lemma 4.5. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ mit $f(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von z_0, eine holomorphe Funktion $g : V \to \mathbb{C}$ sowie zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h_n : V \to \mathbb{C}$ mit*

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \textit{und} \quad h_n(z)^n = f(z) \quad \textit{für alle } z \in V\,.$$

Definition 4.6. Potenzen und Wurzeln. Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig λ des Logarithmus existiert. Dann nennt man für $b \in \mathbb{C}$ die Abbildung

$$G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{b\lambda(z)} =: z^b\,,$$

den zu λ gehörigen Zweig der b-ten Potenz auf G. Für $n \in \mathbb{N}$ heißen die Abbildungen

$$G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{(2\pi \mathrm{i}k + \lambda(z))/n} =: e^{2\pi \mathrm{i}k/n} \cdot z^{1/n}\,,$$

für $k = 0, 1, ..., n-1$ die Zweige der n-ten Wurzel auf G.

Satz 4.10. *Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig λ das Logarithmus existiert. Ist $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ und*

$$f : G \to \mathbb{C} \quad \textit{stetig mit} \quad f(z)^n = z\,, \quad z \in G$$

so stimmt f mit einem der n Zweige der n-ten Wurzel überein.

Lemma 4.6. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. f habe in $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(z_0) \subset U$ und eine holomorphe Funktion $h : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft*

$$f(z) = h(z)^n \quad \textit{für alle} \;\; z \in K_r(z_0)\,.$$

5 Isolierte Singularitäten

5.1 Holomorphe Funktionen auf Kreisringen

Definition 5.1. Kreisringe und Kreisscheiben. Für $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ heißt

$$K_{r,R}(a) := \{z \in \mathbb{C}; r < |z - a| < R\}$$

Kreisring. Im Fall $r = 0$, $R < \infty$ spricht man von einer punktierten Kreisscheibe

$\dot{K}_R(a) := K_{0,R}(a) = K_R(a) \setminus \{a\}$ und im Falle $r = 0$, $R = \infty$ auch von einer punktierten Ebene $\dot{K}_\infty(a) := K_{0,\infty}(a) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Satz 5.1. ***Haupt- und Nebenteil.*** *Seien $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ und $f : K_{r,R}(a) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existieren holomorphe Funktionen*

$$f_1 : K_{r,\infty}(a) \to \mathbb{C} \quad \textit{und} \quad f_2 : K_R(a) \to \mathbb{C}$$

mit der Eigenschaft

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \textit{für alle} \;\; z \in K_{r,R}(a)\,.$$

Dabei kann f_1 so gewählt werden, dass

$$\lim_{|z|\to 0} f_1(z) = 0\,.$$

Durch diese Bedingung sind f_1 und f_2 eindeutig bestimmt. Man nennt f_1 den Hauptteil von f und f_2 den Nebenteil von f.

Satz 5.2. ***von der Laurent-Entwicklung.*** *Gegeben seien $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ und eine holomorphe Funktion $f : K_{r,R}(a) \to \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $z \in K_{r,R}(a)$ eine eindeutige Reihendarstellung der Form*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$$

Die erste Reihe konvergiert auf $K_{r,\infty}$ ***absolut und lokal gleichmäßig gegen den Hauptteil****, die zweite Reihe auf $K_R(a)$* ***absolut und lokal gleichmäßig gegen den Nebenteil*** *von f. Die Koeffizienten a_n, $n \in \mathbb{Z}$ sind eindeutig bestimmt durch*

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial K_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta\,, \quad r < \rho < R,\; n \in \mathbb{Z}\,.$$

Definition 5.2. Eine Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt a ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n, \quad a \in \mathbb{C}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Sie heißt ***konvergent*** in z, wenn ihr ***Hauptteil***

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$$

und ihr ***Nebenteil***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

in z konvergieren. Die Summe der Werte ist dann der Wert der Laurent-Reihe in z. Absolute bzw. (lokal) gleichmäßige Konvergenz der Laurent-Reihe bedeuten absolute bzw. (lokal) gleichmäßige Konvergenz von Haupt- und Nebenteil.

Lemma 5.1. *Seien $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ und $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ holomorph auf $K_{r,R}(a)$. Dann gilt für $r < \rho < R$ und $n \in \mathbb{Z}$:*

$$|a_n| \leq \rho^{-n} \cdot \max\{|f(z)|\,;\ |z-a| = \rho\}\,.$$

5.2 Isolierte Singularitäten

Definition 5.3. Isolierte Singularitäten. Ist U eine offene Umgebung von a, so nennt man $U \setminus \{a\}$ eine punktierte Umgebung von a. Man sagt, dass eine Funktion f eine isolierte Singularität in a hat, wenn es eine punktierte Umgebung von a gibt, in der f holomorph ist, d.h., es gibt ein $r > 0$ mit $f_{\dot{K}_r(a)}$ holomorph.

Definition 5.4. Typen von Singularitäten. Die holomorphe Funktion $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ habe in $a \in U$ eine isolierte Singularität.

a) Gibt es eine punktierte Umgebung V von a, so dass f_V beschränkt ist, so sagt man, dass f in a eine ***hebbare Singularität*** hat.

b) Gilt $\lim_{z \to a} |f(z)| \to \infty$, so sagt man, dass f in a einen ***Pol*** hat.

c) Hat f in a weder eine hebbare Singularität, noch einen Pol, so sagt man, dass f in a eine ***wesentliche Singularität*** hat.

Lemma 5.2. ***Charakterisierung von Singularitäten.*** *Die holomorphe Funktion $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ habe in $a \in U$ eine isolierte Singularität.*

a) *f hat genau dann in a einen Pol, wenn $\frac{1}{f}$ eine hebbare Singularität in a hat mit $\frac{1}{f}(a) = 0$.*

b) *Hat f einen Pol in a, so existiert ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$, sowie eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = (z-a)^{-n} \cdot h(z)\,, \quad z \in U \setminus \{a\}, \quad h(a) \neq 0\,.$$

Es gilt $n = \operatorname{ord}_a(1/f)$. Umgekehrt folgt aus obiger Gleichung, dass f einen Pol in a hat.

Satz 5.3. ***von Casorati-Weierstrass für isolierte Singularitäten.*** *Die holomorphe Funktion $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ habe in $a \in U$ eine isolierte Singularität.*

a) *Gibt es Folgen* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $U \setminus \{a\}$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = a \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(w_n)$$

so hat f *in* a *eine wesentliche Singularität.*

b) *Hat* f *in* a *eine wesentliche Singularität, so gibt es zu jedem* $w \in \mathbb{C}$ *eine Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $U \setminus \{a\}$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w\,.$$

Satz 5.4. *von Picard.* *Hat* f *in* a *eine wesentliche Singularität, son gilt für jedes hinreichend kleine* $\delta > 0$ *entweder*

$$f\left(\dot{K}_\delta(a)\right) = \mathbb{C} \quad \textit{oder} \quad f\left(\dot{K}_\delta(a)\right) = \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$$

für ein $w_0 \in \mathbb{C}$.

Satz 5.5. *Singularitäten und Laurentreihen.* *Die Funktion* f *habe in* a *eine isolierte Singularität mit der Laurent Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n\,.$$

Dann hat f *in* a

(i) *eine hebbare Singularität, wenn* $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$

(ii) *einen* ***Pol der Ordnung*** $m \in \mathbb{N}$ *genau dann, wenn* $a_{-m} \neq 0$ *und* $a_n = 0$ *für alle* $n < -m$.

(iii) *Eine wesentliche Singularität genau dann, wenn* $a_n \neq 0$ *für unendlich viele* $n < 0$.

5.3 Mereomorphe Funktionen und Riemannsche Zahlenkugel

Definition 5.5. Riemannsche Zahlenkugel. Wir nennen $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die abgeschlossene Ebene oder die Riemannsche Zahlenkugel. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ heißt **Umgebung von** ∞, wenn es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ gibt, sodass $\hat{\mathbb{C}} \setminus K \subset M$, bzw. $\hat{\mathbb{C}} \setminus M \subset K$.

Es gelten die üblichen Eigenschaften von Umgebungen, Offenheit und Abgeschlossenheit.
$\hat{\mathbb{C}}$ ist ein sog. **kompakter Hausdorf-Raum.**
Ein Anschauliches Modell von $\hat{\mathbb{C}}$ kann man über die

Einheitssphäre	$S^2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
mit **Nordpol**	$N := (0, 0, 1)$

konstruieren. Dazu verwendet man:

Definition 5.6. Stereographische Projektion. Die Abbildung

$$\varphi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \begin{cases} \infty & x = N \\ \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3} & x \neq N \end{cases}$$

ist eine Bijektion mit

$$\varphi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to S^2,\ z = x + \mathrm{i}y \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Anschaulich projiziert diese Abbildung den Nordpol über die anderen Punkte auf der Sphäre auf die Ebene $\hat{\mathbb{C}}$, die in die Mitte der Sphäre gelegt wird. Die stereographische Projektion ist **topologisch**.

Definition 5.7. Mereomorphe Funktionen. Eine mereomorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion $f : U \setminus P_F \to \mathbb{C}$, wobei

(M.1) P_f eine diskrete Teilmenge von U ist und

(M.2) f in den Punkten $a \in P_f$ Pole hat.

Mereomorphe Funktionen werden z.T. auch als

$$f : U \to \hat{\mathbb{C}} \quad \text{mit} \quad f(z) := \infty \quad \text{für} \quad z \in P_f$$

notiert.

Satz 5.6. ***Mereomorphe Quotienten.*** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.*

a) *Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und ist g auf keiner Wegzusammenhangskomponente von U identisch 0, so ist f/g eine mereomorphe Funktion auf U.*

b) *Ist φ eine mereomorphe Funktion auf U und $a \in U$, so gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(a) \subset U$, sowie holomorphe Funktionen $f, g : K_r(a) \to \mathbb{C}$ mit $g \not\equiv 0$ und*

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad \text{für alle} \quad z \in K_r(a) \setminus P_\varphi.$$

Die **mereomorphen Funktionen auf einem Gebiet G bilden einen Körper**.

6 Der Residuensatz und Anwendungen

6.1 Der Residuensatz

Definition 6.1. Residuum. Die Funktion f habe in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität mit der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n\,, \quad z \in \dot{K}_r(a)\,.$$

Dann nennt man (für $0 < \rho < r$)

$$\mathrm{Res}_a\,(f) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial K_\rho(a)} f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1} \;\in\; \mathbb{C}$$

das Residuum von f an der Stelle a.

Man erkennt die besondere Bedeutung dieses Koeffizienten bereits daran, dass die Laurent-Reihe ohne den Zugehörigen Summand eine Stammfunktion besitzt. Aus der Linearität des Integrals und dem Kalkül der Laurent-Reihen folgt:

Lemma 6.1. ***Rechenregeln für Residuen.*** *Gegeben seien die Funktionen f, g, h, wobei f und g im Punkt a eine isolierte Singularität haben und h in a holomorph ist.*

a) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\mathrm{Res}_a\,(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{Res}_a\,(f) + \beta \mathrm{Res}_a\,(g)\;.$$

b) *Hat f in a einen einfachen Pol oder eine hebbare Singularität gilt*

$$\mathrm{Res}_a\,(f) = \lim_{z\to a} (z-a)\cdot f(z)\,,$$
$$\mathrm{Res}_a\,(f\cdot h) = h(a)\cdot \mathrm{Res}_a\,(f)\;.$$

c) *Hat h in a eine einfache Nullstelle und ist g holomorph in a, so gilt*

$$\mathrm{Res}_a\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h'(a)} \quad \textit{sowie} \quad \mathrm{Res}_a\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

d) *Hat f in a einen Pol höchstens m-ter Ordnung, so gilt:*

$$\mathrm{Res}_a\,(f) = \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left(\frac{(z-a)^m f(z)}{(m-1)!}\right)\,.$$

e) *Ist g holomorph in a so folgt:*

$$\mathrm{Res}_a\left(\frac{g(z)}{(z-a)^k}\right) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}\,.$$

Verbindet man diese Residuen mit der Laurent-Entwicklung und der allgemeinen Cauchyschen Integralformel so erhält man den

Satz 6.1. ***Redisuensatz.*** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $A \subset U$ diskret in U. Sei $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein nullhomologer Zyklus in U mit $\mathrm{Sp}(\Gamma) \subset U \setminus A$. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a \in A} n_\Gamma(a) \cdot \mathrm{Res}_a(f) \ .$$

Alternativ ist U einfach zusammenhängend und Γ in $U \setminus A$ beliebig.

6.2 Funktionentheoretische Anwendungen

Satz 6.2. ***Satz vom Argumentprinzip.*** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ mereomorph und auf keiner Wegzusammenhangskomponente von U konstant sowie $w \in \mathbb{C}$. Die w-Stellen von f in U seien in $a_1, a_2, ...$ und die Polstellen von f in U seien in $b_1, b_2, ...$ jeweils mit den Ordnungen $k(a_\mu)$ bzw. $k(b_\nu)$. Dann gilt für jeden nullhomologen Zyklus in U, mit $\mathrm{Sp}(\Gamma) \subset \mathbb{C} \setminus (\{a_1, a_2, ...\} \cup \{b_1, b_2, ...\})$*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\,\mathrm{d}z = \sum_\mu n_\Gamma(a_\mu) \cdot k(a_\mu) - \sum_\nu n_\Gamma(b_\nu) \cdot k(b_\nu) \, .$$

Ist $\Gamma = \gamma$ eine geschlossene Kurve so folgt:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\,\mathrm{d}z = n_{f \circ \gamma}(w) = \sum_\mu n_\Gamma(a_\mu) \cdot k(a_\mu) - \sum_\nu n_\Gamma(b_\nu) \cdot k(b_\nu) \, .$$

Besitzt f also nur einfache w-Stellen in einem Gebiet, so zählt dieses Integral die Anzahl der w-Stellen bei bekannten Umlaufzahlen. Damit lässt sich zeigen:

Satz 6.3. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. f habe in $a \in G$ eine w_0-Stelle der Ordnung k, $1 \leq k < \infty$. Dann gibt es Umgebungen $V \subset \mathbb{C}$ von a und $W \subset f(G)$ von w_0, so dass es zu jedem $w \in W \setminus \{w_0\}$ genau k verschiedene Werte $z_1, ..., z_k \in V$, in denen f den Wert w annimmt und zwar jeweils mit der Ordnung 1. Darüber hinaus gilt $f(z) \neq w_0$ für alle $z \in V \setminus \{a\}$.*

Für den Fall $k = 1$ lässt sich daraus folgern:

Satz 6.4. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gibt genau dann eine offene Umgebung $V \subset U$ von a, die durch f bijektiv auf eine Umgebung von $f(a)$ abgebildet wird, wenn $f'(a) \neq 0$ gilt.*

Satz 6.5. ***von Rouché.*** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $V \subset \mathbb{C}$ offen mit $\bar{V} \subset U$. Sei Γ ein* ***Randzyklus*** *von V, d.h. $\mathrm{Sp}(\Gamma) = \partial V$ und*

$$n_\Gamma(z) = 1 \quad \text{für alle} \quad z \in V, \qquad n_\Gamma(z) = 0 \quad \text{für alle} \quad z \notin \bar{V} \, .$$

Seien weiter $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $w \in \mathbb{C}$, so dass

$$|f(z) - g(z)| < |f(z) - w| \quad \text{für alle} \quad z \in \mathrm{Sp}(\Gamma) \ .$$

Dann haben f und g gleich viele w-Stellen in V, einschließlich ihrer Vielfachheit.

Insbesondere für Polynome mit nichttrivialen Nullstellen lassen sich hiermit Aussagen treffen:

Beispiel 6.1. Gesucht ist die Anzahl der Nullstellen (inkl. Vielfachheit) des Polynoms $p(z) = z^4 + 6z + 43$. Dazu betrachtet man passende Gebiete und Randzyklen. Da $p(z)$ ein Polynom 4ten Grades ist, folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra bereits, dass $p(z)$ in $\mathbb{C}$ maximal 4 Nullstellen (inkl. Vielfachheit) besitzt.

a) Sei $z \in \partial K_2(0)$ und $g(z) := z^4$. Dann ist

$$|p(z) - g(z)| = |6z + 3| \leq 6\,|z| + 3 = 15 < 16 = |g(z)| \ .$$

Aus dem Satz von Rouché folgt dann, dass $p(z)$ in $K_2(0)$ 4 Nullstellen besitzt.

b) Sei $z \in \partial K_1(0)$ und $g(z) := 6z + 3$. Dann ist

$$|p(z) - g(z)| = \left|z^4\right| = 1 < 3 = 6 - 3 \leq |6z + 3| = |g(z)| \ .$$

Aus dem Satz von Rouché folgt dann, dass $p(z)$ in $K_1(0)$ eine Nullstelle besitzt.

c) Insgesamt folgt also, dass $p(z)$ in $\mathbb{C} \setminus K_2(0)$ keine, in $K_2(0) \setminus K_1(0)$ drei und in $K_1(0)$ eine Nullstelle(n) besitzt.

Satz 6.6. ***von Hurwitz***. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nullstellenreien, holomorphen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine (nach dem Satz von Weierstrass holomorphe) Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f entweder nullstellenfrei oder identisch 0.*

6.3 Anwendungen in der reellen Analysis

Satz 6.7. ***Kreisintegrale:*** *Sei $R(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, die fpr alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$ definiert ist. Dann ist*

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{z}\, R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \in \mathbb{C}(z)$$

eine rationale Funktion und es gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{a \in K_1(0)} \mathrm{Res}_a\left(\tilde{R}\right) \ .$$

Satz 6.8. ***Polfrei in* $\mathbb{R}$ *(I):*** *Sei $R(z) \in \mathbb{C}(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat. Der Grad des Nennerpolynoms von R sei um mindestens 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms von R. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a:\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}_a\,(R)\;.$$

Satz 6.9. ***Polfrei in* $\mathbb{R}$ *(II):*** *Sei $R(z) \in \mathbb{C}(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat. Der Grad des Nennerpolynoms sei größer als der Grad des Zählerpolynoms. Dann gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a:\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}_a\left(R(z)e^{\mathrm{i}z}\right) = -2\pi\mathrm{i} \sum_{b:\mathrm{Im}(b)<0} \mathrm{Res}_b\left(R(-z)e^{-\mathrm{i}z}\right)\;.$$

Gilt $R(x) \in \mathbb{R}(x)$, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -2\pi \cdot \mathrm{Im}\left(\sum_{a:\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}_a\left(R(z)e^{\mathrm{i}z}\right)\right)\;,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot \mathrm{Re}\left(\sum_{a:\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}_a\left(R(z)e^{\mathrm{i}z}\right)\right)\;.$$

Man beachte, dass in den unteren Gleichungen kein i mehr auftritt und daher Vorzeichen und $\mathrm{Im}\,(\cdot)$, sowie $\mathrm{Re}\,(\cdot)$ gegenüber $\mathrm{Re}\,(e^{\mathrm{i}x})$ bzw. $\mathrm{Im}\,(e^{\mathrm{i}x})$ vertauscht sind. Man kann auch Aussagen treffen, wenn man einfache Pole auf der reellen Achse zulässt:

Satz 6.10. ***Pole in* $\mathbb{R}$*:*** *Sei $R(z) \in \mathbb{C}(z)$ eine rationale Funktion, die für $z \in \mathbb{R}$ holomorph ist, bis auf einfache Pole $b_1, ..., b_n$. Ist der Grad des Nennerpolynoms größer als der Grad des Zählerpolynoms von $R(z)$ so gilt mit $b_0 := -\infty$ und $b_{n+1} := \infty$:*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\rho\downarrow 0}\left(\sum_{n=0}^{n}\int_{b_n+\rho}^{b_{n+1}-\rho} R(x)e^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{a:\mathrm{Im}(a)>0}\mathrm{Res}_a\left(R(z)e^{\mathrm{i}z}\right) + \pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{b_j}\left(R(z)e^{\mathrm{i}z}\right)\;.\end{aligned}$$

Damit lässt sich das allgemeine Gaußglockenintegral berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+z)^2}\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

7 Der Riemannsche Abbildungssatz

Es wird von nun an $K_1(0)$ mit $\mathbb{E}$, $\dot{K}_1(0)$ mit $\dot{\mathbb{E}}$ und die obere Halbebene mit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ bezeichnet.

7.1 Automorphismen

Definition 7.1. Biholomorphe Äquivalenz. Zwei Gebiete G und G' in $\mathbb{C}$ heißen biholomorph äquivlaent, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : G \to G'$ gibt. Man schreibt $G \sim G'$.

Es gelten folgende Folgerungen:

a) Durch $G \sim G'$ wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gebiete in $\mathbb{C}$ erklärt.

b) Ist G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $G \sim \mathbb{E}$, so ist G einfach zusammenhängend (zeige mit Integral).

c) Ist G ein beschränktes Gebiet, so gilt $G \not\sim \mathbb{C}$ (Liouville).

Definition 7.2. Automotphismen. Ist G ein Gebiet, so heißt eine biholomorphe Abbildung $f : G \to G$ ein (biholomorpher) Automorphismus von G. Man schreibt auch $\mathrm{Aut}\, G = \mathrm{Bih}\, G$ für die Menge der Automorphismen von G.

Lemma 7.1. *a*) *Die Menge* $\mathrm{Bih}\, G$ *bildet eine Gruppe bezüglich Komposition.*

b) *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$, so ist*

$$\mathrm{Bih}_a G := \{f \in \mathrm{Bih}\, G;\ f(a) = a\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Bih}\, G$*, die sog. Fixgruppe von a.*

c) *Sind G und G' biholomorph äquivalente Gebiete in $\mathbb{C}$, so sind* $\mathrm{Bih}\, G$ *und* $\mathrm{Bih}\, G'$ *isomorph.*

Satz 7.1. *Bestimmen einer Automorphismengruppe* *aus einer anderen. Seien G und G' zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ mit $G \sim G'$ und $f : G \to G'$ biholomorph. Dann gilt*

$$\mathrm{Bih}\, G' = f \circ \mathrm{Bih}\, G \circ f^{-1}\,.$$

7.2 Holomorphie im Unendlichen

Für das Rechnen in $\hat{\mathbb{C}}$ gelten die folgenden Regeln:

$$a \pm \infty = \infty, \quad a \in \mathbb{C}\,; \qquad \infty \cdot \infty = b \cdot \infty = \frac{b}{0} = \infty\,, \quad \frac{b}{\infty} = 0, \quad b \in \mathbb{C}*\,.$$

Definition 7.3. Mero-/Holomorph im Unendlichen. Sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ eine offene Umgebung von ∞. Zu $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ betrachtet man

$$F : K_{1/r}(0) \to \hat{\mathbb{C}},\ F(z) := \begin{cases} f\left(\frac{1}{z}\right) & z \neq 0 \\ f(\infty) & z = 0 \end{cases}.$$

Man nennt f stetig (holomorph, meromorph) in ∞, wenn F stetig (holomorph, meromorph), ggf. ergänzbar, in 0 ist. Die Ordnugn der w-Stelle oder Polstelle von f in ∞ ist dann die Ordnung der $w - Stelle$ oder Polstelle von F in 0.

Es gilt:

a) Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ holomorphen Funktionen sind genau die Konstanten (Liouville).

b) Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen, die auf $\mathbb{C}$ holomorph sind, sind genau die Polynomfunktionen (Betrachte die Potenzreihe von $F(1/z)$.).

c) Die auf $\hat{C}$ meromorphen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen.

7.3 Möbius-Transformationen

Definition 7.4. Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (invertierbar) nennt man

$$\Phi_M : \hat{C} \to \hat{\mathbb{C}},\ \Phi_M(z) := \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei sich die Werte an den kritischen Stellen aus den Rechenregeln für $\hat{\mathbb{C}}$ ergeben, Möbius-Transformation oder gebrochen-lineare Transformation.

Sie hat die folgenden Eigenschaften:

Lemma 7.2. *Seien Φ_M, Φ_L Möbius-Transformationen, dann gilt*

a) *Für $c \neq 0$ hat Φ_M genau ein Residuum in $z = -d/c$ mit*

$$\mathrm{Res}_{\Phi_M}(-d/c) = -\frac{\det M}{c^2}.$$

b) *Für $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gilt:*

$$\Phi_E = \mathrm{id}, \quad \Phi_{\lambda M} = \Phi_M \quad \text{und} \quad \Phi_M \circ \Phi_L = \Phi_{ML}.$$

c) *Φ_M ist bijektiv mit $\Phi_M^{-1} = \Phi_{M^{-1}}$.*

d) *Es gilt:*

$$\Phi_M(z) - \Phi_M(w) = \frac{\det M}{(cz+d)(cw+d)}(z-w) \quad \Rightarrow \quad \Phi_M'(z) = \frac{\det M}{(cz+d)^2}.$$

Lemma 7.3. ***Eindeutigkeit.*** *Für $M, L \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ sind äquivalent:*

(i) $\Phi_M(z) = \Phi_L(z)$ *für mindestens drei verschiedene* $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

(ii) *Es gibt ein* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *mit* $L = \lambda M$.

(iii) $\Phi_M = \Phi_L$.

Im Wesentlichen durch das Maximum-Prinzip erhält man:

Satz 7.2. ***Schwarzsches Lemma.*** *Sei* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *holomorph mit* $f(0) = 0$. *Dann gilt*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{E} \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1\,.$$

Gibt es ein $a \in \dot{\mathbb{E}}$ *mit* $|f(a)| = |a|$ *oder gilt* $|f'(0)| = 1$, *so ex. ein* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit*

$$f(z) = e^{\mathrm{i}\lambda} z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{E}\,.$$

7.4 Verschiedene Automorphismengruppen

Mit den behandelten Mitteln lassen sich folgende Automorphismengruppen bestimmen:

Satz 7.3. *a)* $\mathrm{Bih}\,\mathbb{C}$ *besteht genau aus den Abbildungen*

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto az + b, \quad (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\,.$$

b) $\mathrm{Bih}\,\mathbb{C}^*$ *besteht genau aus den Abbildungen*

$$\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \; z \mapsto az \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \; z \mapsto \frac{a}{z} \quad a \in \mathbb{C}^*\,.$$

c) $\mathrm{Bih}_0\mathbb{E}$ *besteht genau aus den Abbildungen*

$$\mathbb{E} \to \mathbb{E}, \; z \mapsto e^{\mathrm{i}\lambda} z \quad \lambda \in [0, 2\pi)\,.$$

d) $\mathrm{Bih}\,\mathbb{E}$ *besteht genau aus den Abbildungen*

$$\mathbb{E} \to \mathbb{E}, \; z \mapsto e^{\mathrm{i}\lambda} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad a \in \mathbb{E}, \; \lambda \in [0, 2\pi)\,.$$

e) $\mathrm{Bih}\,\dot{\mathbb{E}}$ *besteht genau aus den Abbildungen*

$$\dot{\mathbb{E}} \to \dot{\mathbb{E}}, \; z \mapsto e^{\mathrm{i}\lambda} z, \quad \lambda \in [0, 2\pi)\,.$$

f) Da für $r > 0$ $K_{r,\infty}(0) \to \dot{\mathbb{E}}, \; , \mapsto r/z$ *biholomorph ist, besteht* $\mathrm{Bih}\, K_{r,\infty}(0), \; r > 0$ *genau aus den Abbildungen*

$$K_{r,\infty}(0) \to K_{r,\infty}(0), \; z \mapsto e^{\mathrm{i}\lambda} z \quad \lambda \in [0, 2\pi)\,.$$

g) Es ist $\mathbb{H} \sim \mathbb{E}$ *mit der biholomorphen Cayley-Transformation:*

$$\mathbb{H} \to \mathbb{E}, \; z \mapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\,.$$

h) $\operatorname{Bih} \mathbb{H}$ *besteht genau aus den Abbildungen*

$$\mathbb{H} \to \mathbb{H}, \; z \mapsto \Phi_M(z) \quad \textit{mit} \quad M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\,,$$

wobei $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *die Gruppe der reellen* 2×2 *Matritzen mit* $\det M = 1$ *ist.*

7.5 Der Riemannsche Abbildungssatz

Satz 7.4. ***von Vitali.*** *Sei* $(f_n)_{n\geq 1}$ *eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet* G*. Falls es eine in* G *dichte Teilmenge* $M \subset G$ *gilt, so dass* $(f_n|_M)_{n\geq 1}$ *punktweise konvergiert, dann konvergiert* $(f_n)_{n\geq 1}$ *lokal gleichmäßig.*

Satz 7.5. ***von Montel.*** *Jede lokal beschränkte Folge* $(f_n)_{n\geq 1}$ *von holomorphen Funktionen in einem Gebiet* $G \subset \mathbb{C}$ *besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Satz 7.6. ***Quadratwurzel und Einheitskreis.*** *Sei* $G \neq \mathbb{C}$ *ein Gebiet mit der Eigenschaft, dass es zu jeder nullstellenfreien holomorphen Funktion* $g : G \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Quadratwurzel gibt, d.h. eine holomorphe Funktion*

$$h : G \to \mathbb{C} \quad \textit{mit} \quad h(z)^2 = g(z), \quad z \in G\,.$$

Dann ist G *biholomorph äquivalent zum Einheitskreis.*

Satz 7.7. ***Riemannscher Abbildungssatz.*** *Sei* $G \neq \mathbb{C}$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist* G *biholomorph äquivalent zum Einheitskreis* $\mathbb{E}$*.*
Ist $z_0 \in G$ *und* $\alpha \in (-\pi, \pi]$*, sowie* $a \in \mathbb{E}$*, so existiert genau eine biholomorphe Abbildung* $f : G \to \mathbb{E}$ *mit*

$$f(z_0) = a \quad \textit{und} \quad \arg(f'(z_0)) = \alpha\,.$$

A Gruppenbegriffe

Definition A.1. Gruppe. Ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $*$ ihrer Elemente, wird Gruppe genannt, wenn gilt

(G1) Assoziativität: Für $a, b, c \in G$ gilt: $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(G2) Neutrales Element: Es ex. ein $e \in G$, s.d. für alle $a \in G$ gilt: $a * e = e * a = a$

(G3) Inverses Element: Für alle $a \in G$ ex. ein $a^{-1} \in G$ mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Definition A.2. Gruppenhomoömorphismus. Seien $(G, *)$ und $(H, \odot)$ Gruppen. Eine Funktion $\phi : G \to H$ heißt Gruppenhomoömorphismus, wenn für alle Elemente $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$\phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1) \odot \phi(g_2) \,.$$

Definition A.3. Gruppenisomorphismus. Zwei Gruppen heißten isomorph, wenn ein bijektiver Gruppenhomöomorphismus $\psi : G \to H$ existiert. ψ heißt dann Gruppenisomorphismus.

B Holomorphie vs. Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}$

Alle Ableitungen sind holomorph

Eine holomorphe Funktion ist immer beliebig oft differenzierbar und alle Ableitungen sind wieder holomorph. Im Reellen zeigt z.B. die Funktion

$$x\,|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\,|x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} x\,|x| = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases} ,$$

dass dies nicht gelten muss.

Potenzreihe

Jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ lässt sich auf einem geeigneten Kreis $K_R(a)$, mit $R > 0$, so dass $K_R(a) \subset U$ in eine gleichmäßig gegen f konvergente Potenzreihe entwickeln. Im Reellen zeigt die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} ,$$

deren Potenzreihe überall verschwindet, dass dies nicht gilt.

Stammfunktionen

Im reellen besitzt jede stetige Funktion eine Stammfunktion. Im Komplexen zeigt z.B. die überall stetige Funktion $z \mapsto |z|$, integriert über die Wege $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{\mathrm{i}t}$ und $[1, -1]$ wegen:

$$\int_\gamma |z| \, \mathrm{d}z = \int_0^\pi \left| e^{\mathrm{i}t} \right| \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = e^{\mathrm{i}t} \Big|_0^\pi = -2 \neq -1 = \int_0^1 |1 - 2t| \cdot (-2) \, \mathrm{d}t = \int_{[1,-1]} |z| \, \mathrm{d}z \, ,$$

dass dies nicht gilt.

Liouville

Für holomorphe Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$, also ganze Funktionen, besagt der Satz von Liouville, dass solche nur dann beschränkt sein können, wenn sie konstant sind. Im Reellen sind aber beispielsweise Sinus und Cosinus beschränkt und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$.