Notes - Höhere Mathematik IV: Funktionalanalysis

Vorlesung aus dem Sommersemester 2017 von Prof. Michael Westdickenberg an der RWTH Aachen

Autor: Jannis Zeller

Letzte Änderung: 4. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

Disclaimer

Diese Zusammenfassung ist nicht offiziell von der RWTH Aachen oder Dozierenden der betreffenden Lehrveranstaltungen bestätigt oder erprobt. Sie wurde nach bestem Wissen und Gewissen erstellt.

1 Crashkurs Maßtheorie

1.1 Verallgemeinerung des $L^2(\mathbb{R})$

Aus HM III ist bereits der Raum $L^2(\mathbb{R})$

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f|_{[-n,n]} \text{ Riemann Integrierbar } \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

bekannt. Ein Problem dieses (Vektor)Raumes ist die fehlende Vollständigkeit. Zur Erinnerung:

Definition 1.1.
Eine Folge $f_n \in \mathbb{C}$ heißt Cauchy-Folge genau denn wenn $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$, sodass für $m, n > N$ der Abstand $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ ist.

Mittels dieser Definition beschreibt man auch die Vollständigkeit eines Raumes:

Definition 1.2. ***Vollständigkeit:***
*Ein Raum $\mathcal{U}$ heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in $\mathcal{U}$ gegen einen Grenzwert, der ebenfalls **in $\mathcal{U}$ liegt**, konvergiert.*

Leider sind Räume wie der L^2 mit der gewöhnlichen Definition des Riemann oder Regel-Integrals nicht vollständig. Daher wird der Begriff des Integrals im Folgenden erweitert.

1.2 Lebesguemaß

Definition 1.3. ***Sigma-Algebra***
Sei Ω eine Menge. Dann nennt man eine Menge $\Sigma \subset P(\mathbb{R}^n)$ σ-Algebra über Ω wenn gilt:

(*i*) $\emptyset \in \Sigma$

(*ii*) $A \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad A^C = \Omega \backslash A \in \Sigma$

(*iii*) $A_n \in \Sigma \ \ (n \in \mathbb{N}) \qquad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

Aus dieser Definition folgt die weitere Eigenschaft:

(*iv*) $A, B \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \Sigma$ und $A \backslash B = B \cap A^C \in \Sigma$

Wichtig für die Betrachtung ist vor allem, die sog. Borel-Algebra:

Definition 1.4. ***Borel-Algebra***
Die Borel-Algebra über Ω ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen von Ω enthält.

Die Einschränkung eines „Maßes“ auf Mengen dieser Art sichert die oben fehlende Vollständigkeitseigenschaft auf einem neuen Raum, der später definiert wird. Das Tupel (Ω, Σ) wird auch als **Messbarer Raum** bezeichnet.

Definition 1.5. ***Maß***
*Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum. Ein **Maß** auf (Ω, Σ) ist eine Funktion $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) für paarweise disjunkte Mengen A_n gilt: $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Ein Tripel (Ω, Σ, μ) nennt man auch **Maßraum**. Von besonderem Interesse ist das sog. Lebesguemaß:

Satz 1.1. *Lebesguemaß*
Es existiert genau ein Maß λ auf der Borel-Algebra $B(\mathbb{R}^n)$, für das gilt:

$$\lambda([a_1, b_1], \, \dots, [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Dieses Maß wird Lebesguemaß genannt.

Dieses ist insbesondere **Translations-** und **Rotationsinvariant**! Insgesamt nennt man das Tripel (Ω, Σ, μ) einen **Maßraum**.

Definition 1.6. *Einfache Funktionen*
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wir bezeichnen $f : \Omega \to [0, \infty)$ als „einfache Funktion“, wenn sich f schreiben lässt als:

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \, \mathbf{1}_{A_k} \quad \text{mit} \quad \mathbf{1}_{A_k} = \begin{cases} 1 & x \in A_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir definieren das Integral bezüglich eines Maßes μ über eine solche Funktion als:

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n)$$

Man nennt $\mathbf{1}_B$ auch die **charakteristische Funktion** von B. Das für uns interessante Maß wird das Lebesgue-Maß sein. Analog zur Theorie des Riemann oder Regelintegrals definiert man Integrabilität bzw. jetzt Messbarkeit als Aproximierbarkeit durch eine Referenzfunktion, hier die einfache Funktion:

Definition 1.7. *Messbare Funktionen*
*Eine Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$ heißt messbar, falls eine **monoton wachsende** Folge S_i von einfachen Funktionen existiert, sodass*

$$f = \lim_{i \to \infty} S_i \quad \textit{punktweise}$$

Das Integral ist dann definiert als

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \sup_i \int S_i \, \mathrm{d}\mu$$

Lemma 1.1.
Es gelten die Folgenden Eigenschaften:

(i) Aus der Riemann-Integrierbarkeit folgt die Lebesgue-Integrierbarkeit.

(ii) Sei f_n eine Folge von lebesgue-integrierbaren Funktionen, dann ist die Grenfunktion $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ auch lebesgue-integrierbar.

(*iii*) *Integral und Grenzwertübergang bei Funktionenfolgen vertauschen nicht immer! Es gelten aber die gewohnten Konvergenzsätze (Monotonie und Beschränktheit, Dominierende Konvergenz / Majorante).*

Mit dem nun vollständig definierten Maßräumen kann man zeigen:

Satz 1.2. ***Lebesgueräume***
Sei ein Maßraum (Ω, Σ, μ) *gegeben. Dann ist der Raum*

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}\,, \quad \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

mit der Abstandsdefinition

$$d(f,g) = \left(\int_\Omega |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

vollständig*. Solche Räume nennt man Lebesgueräume.*

Dank dieser Eigenschaft ist es möglich mit den lebesgue-integrierbaren Funktionen einen vollständigen Vektorraum mit Skalarprodukt (unitären Vektorraum) zu definieren.

1.3 Sätze und Gleichungen über das Lebesgue Integral

Wir verwenden die Norm:

$$\boxed{||f(x)||_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}}$$

Dann gelten die folgenden **Ungleichungen**:

- Höldersche Ungleichung: $1/p + 1/q = 1, \quad q, p > 1$

$$||f(x)g(x)||_{L^1} \leq ||f(x)||_{L^p} \cdot ||g(x)||_{L^q}$$

- Minkovski Ungleichung (Δ-Ungl.): $p \geq 1$

$$||f(x) + g(x)||_{L^p} \leq ||f(x)||_{L^p} + ||g(x)||_{L^p}$$

- Die Youngsche Ungleichung $1/p + 1/q = 1, \quad q, p > 1$

$$||f(x)g(x)||_{L^1} \leq \frac{1}{p} \left(||f(x)||_{L^p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(||g(x)||_{L^q} \right)^q$$

Satz 1.3. *Satz von* ***Fubini***
Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ *und* $B \subset \mathbb{R}^n$ *messbar und* $f : A \times B \to \mathbb{R}$ *eine messbare Funktion. Wenn*

eines der Integrale:

$$\int_A \int_B |f(x,y)| \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \quad \textit{oder} \quad \int_B \int_A |f(x,y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

*existiert, so auch das andere und es lässt sich die **Integrationsreihenfolge tauschen**.*

Satz 1.4. *Satz von **Beppo-Levi** (monotone Konvergenz)*
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\Omega)$ eine Folge von Funktionen die monoton wachsend (in n) ist und die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Für monoton fallende Funktionenfolgen muss zusätzlich $\int_\Omega f_1\,\mathrm{d}x < \infty$ gelten.

Satz 1.5. *Lemma von **Fatou***
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\Omega)$ eine Folge von nichtnegativen Funktionen. Dann gilt:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 1.6. *Satz von **Lebesgue** (majorisierende Konvergenz)*
Sei $g \in L^1(\Omega)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ eine Folge von Funktionen, sodass für fast alle (bis auf endlich viele/Menge mit Maß 0) $x \in \Omega$ gilt: $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Prüfen von Lebesgue Integrierbarkeit:

1) Die Funktion ist Riemann integrierbar. $\Rightarrow$ Die Funktion ist Lebesgue integrierbar.
2) Die Funktion ist beschränkt und hat einen kompakten Träger.
3) Es existiert eine Folge von $f_n \in L^1$, mit $||f_n - f|| \to 0$, dann ist f, wegen der Vollständigkeit der L^p-Räume, Lebesgue integrierbar.

2 Hilberträume

Nachdem wir diese Vorarbeit zur Maßtheorie gleißtet haben wollen wir nun dazu über gehen Hilberträume zu definieren. Zur Erinnerung hier noch einmal die Definition eines „gewöhnlichen“ Vektorraumes:

Definition 2.1. ***Vektorraum:***
*Eine Menge V zusammen mit einer Verknüpfung $\oplus : V \times V \to V$ (Addition) und einer Verknüpfung $\odot : K \times V \to V$ (Multiplikation), bezeichnet man als **Vektorraum über dem Körper** K, wenn gilt:*

A: Für die Addition gilt: Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Existenz eines neutralen und eines Inversen Elementes

M: Für die Multiplikation gilt: $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$, $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$, $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$, *Existenz eines Neutralen Elementes*[1]

In dem für uns interessanten Fall ist der entsprechende Körper $\mathbb{C}$.

Definition 2.2. ***Hilbertraum:***
Ein vollständiger Vektorraum $\mathcal{U}$ *mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum. Für das Skalarprodukt* $\langle \cdot \,|\cdot \rangle : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *gilt:*

(i) $\langle a \,|b \rangle = \langle b \,|a \rangle^*$

(ii) $\langle a \,|a \rangle \geq 0$*, wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn* $a = 0$*. Hierbei stellt (i) sicher, dass* $\langle a \,|a \rangle \in \mathbb{R}$*.*

(iii) $\langle a \,|\lambda b + c \rangle = \lambda \langle a \,|b \rangle + \langle a \,|c \rangle \,, \quad \lambda \in \mathbb{C}$ *(Linearität im zweiten Argument)*

Aus (i) und (iii) folgt die „Anti"linearität im ersten Argument:

$$\langle \alpha x_1 + x_2 \,|y \rangle = \alpha^* \langle x_1 \,|y \rangle + \langle x_2 \,|y \rangle$$

Wir definieren außerdem die **Norm und den Abstand** mittels des Skalarproduktes:

$$\text{Norm:} \quad ||x|| := \sqrt{\langle x \,|x \rangle}\,, \qquad \text{Abstand:} \quad d(x, y) := ||x - y||$$

Vollständigkeit bedeutet hier, wie oben, dass jede Cauchy-Folge **bezüglich der spezifischen Abstandsdefinition** in $\mathcal{U}$ konvergiert. Dabei sagt man, das Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\cdot \rangle$ induziert die Norm $|| \cdot ||$. Für die Norm gilt die **Dreiecksungleichung**.

Beispiele:

1) $\mathbb{C}^n$ mit dem aus dem $\mathbb{R}^n$ gewohnten Skalarprodukt für Spaltenvektoren.

2) $l^2 = \{x = (x_1, x_2, ...) : \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ mit $\langle x \,|y \rangle_{l^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* y_i$

3) Sei ein Maßraum: (Ω, Σ, μ) gegeben. Dann ist

$$L^2(\Omega, \Sigma, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}\,, \quad \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt $\langle f \,|g \rangle_{L^2} := \int_\Omega f^*(x) g(x) \,\mathrm{d}\mu$ ein Hilbertraum. Offenbar ist der l^2 ein Spezialfall hiervon, mit $\Omega = \mathbb{N}$, sowie $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und dem Zählmaß.

[1]Insbesondere wird *nicht* die Existenz eines Inversen Elementes vorausgesetzt.

2.1 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Orthogonalität

Satz 2.1. ***Cauchy-Schwarzsche Ungleichung***
Sei $\mathcal{U}$ ein Hilbetraum und $x, y \in \mathcal{U}$. Dann gilt:

$$|\langle x\,|y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Damit und mittels der Dreiecksungleichung[2] kann man beweisen, dass das Skalarprodukt $\langle \cdot\,|\cdot\rangle$ eine **stetige** Abbildung ist, also $\langle x_n\,|y_n\rangle \rightarrow \langle x\,|y\rangle$ für $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$. Dies erlaubt die **Vertauschung** von Grenzwerten und dem Skalarprodukt.

Um nun im folgenden über Basen und insbesondere über orthogonale Basen sprechen zu können, führen wie den Begriff der Orthogonalität für Hilberträume ein:

Definition 2.3. ***Orthogonalität***
Zwei Elemete x, y eine Hilbertraumes $\mathcal{U}$ heißen orthogonal, falls $\langle x\,|y\rangle = 0$.

Aus dem reellen Fall ist der Cosinussatz $\langle x\,|y\rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cos(\theta)$, mit dem Winkel θ zwischen x und y, womit dann auch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Orthogonalität direkt einleuchtend sind.

2.2 Basen eines Hilbertraumes

Definition 2.4. ***Orthonormalsystem:***
Sei $\mathcal{U}$ ein Hilbertraum. Dann nennen wir eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ von Elementen von $\mathcal{U}$ orthogonal, falls $\langle e_i\,|e_j\rangle = \delta_{ij}$. Falls zusätzlich gilt, dass $||e_i|| = 1$, dann heißt diese Familie Orthonormalsystem.

Definition 2.5. ***orthonormale Basis:***
Ein Orthonormalsystem heißt Orthonormalbasis eines Hilbertraumes $\mathcal{U}$, falls der lineare Spann von $(e_i)_{i\in I}$ ***dicht*** *ist in $\mathcal{U}$.*

(*i*) *Der lineare Spann ist die Menge aller Linearkombinationen aus* ***endlich vielen*** *Elementen e_i.*

(*ii*) *Dichtheit bedeutet, dass für $\epsilon > 0$ gilt, sodass $\forall\ x \in \mathcal{U}\ \exists\ x_\epsilon \in \mathrm{Spann}((e_i)_{i\in I})$: $||x - x_\epsilon|| < \varepsilon$.*

Beispiele

1) Im $\mathbb{C}^n$ kann man einfach die kartesische Basis wählen. Die Dichtheit folgt trivial.

[2] Vorher muss man ein kreative 0 addieren.

2) l^2: Definiere $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ mit dem i-ten Element 1. Die Dichtheit bleibt zu zeigen. Sei $a \in l^2\,,\quad a = (a_1, a_2, ...)$. Aus der geforderten Konvergenz der Summe folgt, dass man für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, s.d.

$$\sum_{i=N}^{\infty} |a_i|^2 \leq \epsilon\,.$$

So kann man also ein $\tilde{a} \in l^2\,,\quad \tilde{a} := (a_1, a_2, ..., a_N, 0, 0, ...)$, mit dem gilt:

$$||a - \tilde{a}|| = \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i|^2 \leq \epsilon$$

Somit ist die Dichtheit gezeigt.

3) $L^2([0,1])$: Wähle $e_n(x) = \exp(2\pi i n x)\,,\ n \in \mathbb{Z}$ als orthonormale Basis.

Definition 2.6.
Ein $(X, ||\cdot||)$ normierter Raum (ein Raum auf dem eine Norm definierbar ist) heißt ***seperabel*** *falls eine abzählbare, dichte Teilmenge existiert.*

Satz 2.2. ***ONB eines Hilbertraumes:***
Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormale Basis. Falls dieser Hilbertraum seperabel und unendlichdimensional ist, dann existiert eine orthonormale Basis, die abzählbar viele Elemente besitzt.

Diesen Satz kann man mittels des Orthogonalisierungverfahren von Gram-Schmidt beweisen.

Gram-Schmidtsches Orthonormatisierungsverfahren
Aus einer Menge w_n von n-paarweise linear unabhängigen Elementen eines Vektorraum erhält man mittels der Rekursionsvorschirft

$$v_n = w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_i\,|w_n\rangle}{\langle v_i\,|v_i\rangle}$$

ein orthonormales System v_n von Vektoren mit identischem Spann. Dieses bleibt dann noch zu normieren.

2.3 Einige Eigenschaften von Hilberträumen

Lemma 2.1. *Sei $\mathcal{U}$ ein Hilbertraum, $x, y \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- *Pythagoras:* $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle x\,|y\rangle\right)$
- *Dreiecksungleichung:* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \qquad (\Rightarrow \quad ||x - y|| \geq \Big|\,||x|| - ||y||\,\Big|)$
- *Besselsche Ungleichung: Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein ONS, dann gilt:*

$$||x||^2 \geq \sum_{1=k}^{N} |\langle e_k\,|x\rangle|^2$$

Satz 2.3.
Sei $\mathcal{U}$ ein unendlichdimensionaler, seperabler Hilbertraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis. Dann gilt

(i) *Für jedes $x \in \mathcal{U}$ gilt:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n \,|x\rangle \, e_n$$

Diese Darstellung ist eindeutig.

(ii) *Man kann Norm und Skalarprodukt ausdrücken durch:*

$$\langle x \,|y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x \,|e_n\rangle \langle e_n \,|y\rangle \,, \qquad ||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n \,|x\rangle|^2 \quad \text{(Parseval Identität)}$$

3 Beschränkte Abbildungen zwischen Hilberträumen

Seien X, Y Hilberträume, dann ist eine Lineare Abbildung wie gewohnt gegeben, falls:

$$\mathbf{A} : X \to Y \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \mathbf{A} x_1 + \alpha_2 \mathbf{A} x_2 \quad x_1, x_2 \in X \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

Wir nennen lineare Abbildungen auf Hilberträumen oft auch Operatoren.

Definition 3.1. ***Beschränkte Abbildung***
Seien X, Y Hilberträume. Dann heißt eine lineare Abbildung $A : X \to Y$, beschränkt falls gilt

$$||\mathbf{A}x||_Y \le C||x||_X$$

Die kleinste Konstante, für die diese Ungleichung gilt, heißt ***Operatornorm*** *von A:*

$$||\mathbf{A}|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||\mathbf{A}x||_Y}{||x||_X} = \sup_{||x||=1} ||\mathbf{A}x||_Y$$

Man kann nicht einfach $||\mathbf{A}x||_Y \le C$ fordern, da aufgrund der Linearität ein Faktor λx diese Norm unbeschränkt wachsen lässt. Man muss hier unterscheiden, die Norm bezüglich welches Raumes man verwendet. Tatsächlich ist die Menge aller beschränken Operatoren von X nach Y mit der Operatornorm und der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein **vollständiger, normierter Vektorraum** (auch **Banachraum**), der $\mathcal{B}(X, Y)$ genannt wird. Die Hintereinanderausführung zweier beschränkter Operatoren ist ebenfalls linear und beschränkt. Aus diesen Eigenschaften der Operatoren folgt sogar schon, dass sie **stetig** sind.

Beispiele:

1) Wir betrachten den Hilbertraum $\mathcal{U} = l^2(\mathbb{N})$ mit der Basis $e_n = (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = c < \infty$. Nun ist $x \in \mathcal{U}$ immer darstellbar durch eine Reihe $x = \sum x_n e_n$. Also können wir einen Operator $\mathbf{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ definieren:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{A}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n e_n$$

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Abbildung linear ist. Die Beschränktheit erhalten wir durch:

$$||\mathbf{A}x||^2 = \left|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n e_n\right|\right|^2 \overset{\text{Parseval}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 \leq c^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \overset{\text{Parseval}}{=} c^2 ||x||^2$$

Es gilt sogar $||A|| = c$, indem man einfach den Entsprechenden Basisvektor als x einsetzt.

b) **Orthogonale Projektion:** Sei $\mathcal{U}$ ein seperabler Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir definieren die eine Abbildung von $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$:

$$\mathbf{P}_N\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) := \sum_{i=1}^{\boldsymbol{N}} x_n e_n$$

Dieser Operator ist wieder linear und die Beschränktheit folgt aus der Parseval Identität. Es folgt sogar $||\mathbf{P}_N|| = 1$. Zusätzlich sieht man sofort: $\mathbf{P}_N \circ \mathbf{P}_N = \mathbf{P}_N$. Wegen

$$\langle \mathbf{P}_N\, x | x - \mathbf{P}_N\, x\rangle = 0 \quad \forall \quad \in \mathcal{U}$$

nennt man $\mathbf{P}_N$ orthogonal.

3.1 Dualraum

Definition 3.2. *Dualraum*
Sei $\mathcal{U}$ ein Hilbertraum. Dann bezeichnen wir den Raum:

$$\mathcal{U}^* := \{\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \,|\, \text{s.d. } \varphi \text{ linear und beschränkt ist}\}$$

als Dualraum. Die Elemente $\varphi \in \mathcal{U}^*$ bezeichnen wir als stetige bzw. beschränkte Funktionale.

Beispiel: Sei $y \in \mathcal{U}$ und definiere die Abbildung:

$$\varphi_y : U \to \mathbb{C}\,, \quad x \mapsto \langle y\,|x\rangle$$

Die Linearität und der geforderte Wertebereich sind sofort klar. Bleibt die Beschränktheit zu zeigen. Es gilt aber:

$$|\varphi_y(x)| = |\langle y\,|x\rangle| \overset{\text{C.S.}}{\leq} ||x||\,||y||$$

Satz 3.1. ***Rieszscher Darstellungssatz:***
Sei $\mathcal{U}$ ein Hilbertraum und $\varphi \in \mathcal{U}^*$. Dann existiert ein $y_\varphi \in \mathcal{U}$ s.d.

$$\varphi(x) = \langle y_\varphi \,|x\rangle \quad \forall\ x \in \mathcal{U}\,.$$

Dieses y_φ ist eindeutig bestimmt.

4 Funktionenräume

Wir betrachten im Folgenden Funktionenräume auf offenen Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Insbesondere definieren wir die Menge:

$$\mathbb{C}_C^\infty(\Omega) = \{\psi : \Omega \to \mathbb{C}\,,\ \text{beliebig oft stetig diferenzierbar mit kompakten Träger in}\ \ \Omega\}\,.$$

Der Träger, der auch als $\operatorname{Spt}\psi$ bezeichnet wird, ist der Abschluss der Menge aller $x \in \Omega$, sodass $\psi(x) \neq 0$. Da der Träger kompakt, also beschränkt und abgeschlossen ist, kann er nicht beliebig nahe an den Rand von Ω heranreichen.

4.1 Schwache Ableitungen

Definition 4.1. ***Schwache Ableitung:***
Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1(\Omega)$ dann nennen wir $g \in L^1(\Omega)$ eine schwache Ableitung von f falls gilt

$$\int_\Omega f \partial_{\boldsymbol{x}}\psi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega g\,\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \forall\ \ \text{Testfunktionen}\ \ \psi \in C_C^\infty(\Omega)$$

Diese Definition ist eine sinnvolle Verallgemeinerung, da im „Grenzfall“ $f \in C^1(\Omega)$ mit $g := \partial_{\boldsymbol{x}} f$ die Gleichung sofort erfüllt ist, wie man mittels partieller Integration zeigt. Man kann zeigen, dass die schwache Ableitung bis auf eine Nullmenge **eindeutig** ist. Wir bezeichnen die schwache Ableitung nach der Variable x_i auch mit:

$$\partial_i f\,,$$

im Gegensatz zu $\partial f/\partial x_i$ oder $\partial_{x_i} f$ für gewöhnliche partielle Ableitungen. Interessant ist es dieses Konzept auf Ableitungen nach beliebigen Variablen zu verallgemeinern. Dazu führen wir den **Multiindex** $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ein. Wir schreiben:

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} f =: \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n}} f\,,$$

wobei $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum \alpha_i$ ist. Dann wird die Definition der schwachen Ableitung verallgemeinert zu:

$$\int_\Omega f\, D^{\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int_\Omega g\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Tatsächlich gelten diese Eigenschaften und Definitionen auch auf dem **lokalen Lebesgueraum** $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Ein lokaler Lebesgueraum $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ ist hierbei ein Lebesgueraum, auf dem die Funktion nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich Ω sondern nur auf *jeder* kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ integrierbar sein muss:

$$L^p_{\text{loc}} := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\; \text{messbar} \,, \; ||f\,\mathbf{1}_K||_{L^p(\Omega)} \leq \infty \right\} \,,$$

wobei $\mathbf{1}_K$ die charakteristische Funktion von K ist.[3]

4.2 Sobolev-Räume

Definition 4.2. ***Sobolev Raum***
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seien zudem $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$. Dann bezeichnen wir den Raum:

$$\begin{aligned} \omega^{k,p}(\Omega) := \{ f \in L^p(\Omega) : \; & f \text{ schwach differenzierbar bis zur Ordnung } k \,, \\ & \text{wobei } \; D^\alpha f \in L^p(\Omega) \; \forall \; \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\boldsymbol{\alpha}| \leq k \} \end{aligned}$$

als Sobolev Raum.

Die **Norm** eines solchen Sobolev Raumes definieren wir als:

$$\boxed{||f||_{\omega^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} ||D^{\boldsymbol{\alpha}} f||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}}$$

Mithilfe dieser Norm kann man die Definition von Sobolev Räumen auch kürzer fassen:

$$\omega^{k,p}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar} \,, \; ||f||_{\omega^{k,p}(\Omega)} < \infty \right\}$$

Spezialfall $p = 2$
Im Spezialfall $p = 2$ bezeichnet man $\omega^{k,2}(\Omega)$ auch als $H^k(\Omega)$. Die Norm reduziert sich entsprechend auf die L^2 Skalarprodukte und man kann zeigen, dass dieser Raum **vollständig** ist. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt sofort, dass H^k ein **Hilbertraum** ist.

Beispiel Schrödingergleichung
Die Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\partial_t \psi(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\hbar}{2m} \Delta \psi(\boldsymbol{x}, t)$$

vereinfacht sich mit dem Ansatz $\psi(\boldsymbol{x}, t) = e^{\mathrm{i}kt} u_k(\boldsymbol{x})$ zu:

$$e^{\mathrm{i}kt} \left(-ku(\boldsymbol{x}) + \frac{\hbar}{2m} \Delta u(\boldsymbol{x}) \right) = 0$$

Von besonderem Interesse ist also die Lösung der Gleichung: $u - \Delta u = f$, mit f in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Man beobachtet:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u + u) w \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \underbrace{=}_{p.int.} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla w \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^n} uw \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \langle u \,| w \rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

[3]Die charakteristische Funktion von K ist 1 in K und sonst 0.

Eine schwache Lösung der obigen Gleichung ist also eine Funktion $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\langle u \,|w\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f w \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \;\forall\; w \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

Da das Funktional $\varphi : H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\,,\; f \mapsto \int f w \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ offensichtlich linear und beschränkt (folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung) ist, ist φ Element des Dualraumes und nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert eine eindeutige Funktion u in $H^1(\mathbb{R}^n)$, die die obige Gleichung erfüllt.
Auf diese Weise kann man auch durch das Finden von anderen Skalarprodukten die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung bestimmter Differentialgleichungen zeigen (siehe Übung P04).

5 Die Fourier-Transformation

Definition 5.1. ***Fourier-Transoformierte:***
Sei eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Dann nennen wir

$$(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

die Fourier-Transformierte von f.

Wir definieren des Weiteren die Menge:

$$\begin{aligned} C_0(\Omega) := \{ & M : \Omega \to \mathbb{C} : M \text{ stetig und } \forall\, \epsilon > 0 \;\exists\; K \subset \Omega, \text{ s.d. } K \text{ kompakt und} \\ & |f(x)| \leq \epsilon \;\forall\; x \in \Omega \setminus K \} \end{aligned}$$

Mit der Norm $||u||_{C_0(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$ ist dieser Raum vollständig, also ein Banachraum. Dies ist also der Raum der stetigen und für große x gegen 0 konvergierenden Funktionen. Damit können wir eine Aussage über den Wertebereich der Fourier-Transformierten treffen:

Lemma 5.1. *Riemann-Lebesgue:*
$\mathcal{F}$ ist eine Abbildung von $L_1(\mathbb{R}^n)$ nach $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Das Ziel ist es nun, das Konzept der Fouriertransformationen auf den $L^2(\mathbb{R}^n)$ zu verallgemeinern. Hierzu definieren wir zunächst unitäre Operatoren:

Definition 5.2. ***Unitäre Operatoren:***
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein beschränkter, linearer Operator $\mathbf{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt unitär, falls:

(i) $\langle \mathbf{U}x \,|\mathbf{U}y\rangle = \langle x \,|y\rangle \;\;\forall\; x, y \in \mathcal{H} \quad\Leftrightarrow\quad ||\mathbf{U}x|| = ||x||$

(ii) $\mathbf{U}$ ***surjektiv*** *ist.*

Für den ersten Punkt reicht es **Isometrie** ($||\mathbf{U}x|| = ||x||$) zu zeigen. Dies kann man wie folgt beweisen:

$$||\mathbf{U}(x+y)||^2 = ||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle x\,|y\rangle\right) + ||y||^2$$

Hier wurde als erstes die Isometrie ausgenutzt. Gleichzeitig gilt aber aufgrund der Linearität auch:

$$||\mathbf{U}(x+y)||^2 = ||\mathbf{U}x + \mathbf{U}y|| = ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle \mathbf{U}x\,|\mathbf{U}y\rangle\right) + ||y||^2$$

Hier wurde die Isometrie erst nach dem zweiten „=“ ausgenutzt. Also stimmen die Realteile von $\langle x\,|y\rangle$ und $\langle \mathbf{U}x\,|\mathbf{U}y\rangle$ überein. Analoges Vorgehen mit $\mathbf{U}(x+iy)$ liefert die Übereinstimmung der Imaginärteile womit die Aussage gezeigt ist.

5.1 Eigenschaften der Fouriertransformation

Satz 5.1. ***Eigenschaften der Fourier-Transformierten:***
Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}$ hat folgende Eigenschaften:

(*i*) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, existiert eine **Fourierinverse**, die gegeben ist durch:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\boldsymbol{y}) e^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

(*ii*) *(**Parseval**:) Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt, dann ist $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und*

$$||\mathcal{F}f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{y})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

(*iii*) *$\mathcal{F}$ kann zu einer Abbildung von $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden.*

Tatsächlich gilt sogar: $\langle \mathcal{F}f\,|\mathcal{F}g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f\,|g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Zusätzlich gilt der folgende Zusammenhang:

$$\mathcal{F}^2 = -\mathbf{1} \quad \text{(Zeige mit Substitution)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F}$$

Folgerung 5.1.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f \in H^k(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad x_j^\alpha \mathcal{F}f(\boldsymbol{x}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $j = 1, ..., n$ und alle Multiindizes mit $|\boldsymbol{\alpha}| \leq k$.

Dies kann man mit (*ii*) aus dem vorherigen Satz beweisen. Hier exemplarisch für die erste Ableitung:

$$\left(\mathcal{F}\partial_{y_j} f\right)(\boldsymbol{x}) \underbrace{=}_{p.\ int.} -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} f\boldsymbol{y} e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}(-\mathrm{i}x_j)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{i}x_j\left(\mathcal{F}f\right)(\boldsymbol{x})$$

Mit der Parseval Identität der Fouriertransformation folgt dann, dass die Ableitung integrierbar ist.

Definition 5.3. ***Einbettung:***
Wir bezeichnen eine Abbildung f von zwei Räumen als Einbettung, wenn für sie gilt: f ist injektiv, stetig und offen, d.h. offene Mengen werden auf offene Mengen abgebildet.

Die Existenz einer stetigen Einbettung von einem Raum in den anderen wird auch mit dem Symbol „$\hookrightarrow$" bezeichnet.

Satz 5.2. ***Sobolev-Einbettung:***
Seien $K, n \in \mathbb{N}$ mit $K > n/2$. Dann gilt:

$$H^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$$

6 Unbeschränkte Operatoren

In der Theoretischen Quantenmechanik ist der Hilbertraum der Wellenfunktionen $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ von zentraler Bedeutung. Insbesondere sind sog. Orts- und Impulsoperatoren:

$$\hat{x} : f \mapsto xf(x)\,, \qquad \hat{p} : f \mapsto \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

wichtig. Das erste Problem ist, dass der Definitionsbereich der Operatoren nicht zwingend der ganze Hilbertraum ist (nicht alle L^2-Funktionen sind z.B. (schwach) differenzierbar) der **Definitionsbereich** der Operatoren ist. Zudem kann man zeigen, dass die Operatoren **nicht beschränkt** sind. Zum Beispiel kann man den Ortsoperator und die Funktionenschaar $f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ (mit charakteristischer Funktion) betrachten. Bei der folgenden Definition muss aufgepasst werden! Auch beschränkte Operatoren können nach dieser unbeschränkt sein. Man muss die Definition so verstehen dass die Operatoren unbeschränkt sein **können**.

Definition 6.1. ***Unbeschränkte Operatoren:***
Ein unbeschränkter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$, wobei $D(\mathbf{A}) \subset \mathcal{H}$ ein Unterraum ist und $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \to \mathcal{H}$ linear.

In diesem Sinne erfüllen auch beschränkte Operatoren mit $D(\mathbf{A}) = \mathcal{H}$ die Bedingung für Unbeschränktheit. Man spricht jetzt nur noch von „**gleichen**" Operatoren, wenn auch der Definitionsbereich übereinstimmt. Falls $D(\mathbf{A}) \subset D(\mathbf{B})$ und $\mathbf{A}x = \mathbf{B}x$ so nennt man $(\mathbf{B}, D(\mathbf{B}))$ auch eine **Fortsetzung** von $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$. Summen und sonstige Verknüpfungen muss man **unter Berücksichtigung** der Definitionsbereiche definieren:

Z.B. ist $(\mathbf{A}+\mathbf{B}, D(\mathbf{A}+\mathbf{B}))$ definiert als:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})x := \mathbf{A}x + \mathbf{B}x \quad \text{für} \quad x \in D(\mathbf{A}+\mathbf{B}) := D(\mathbf{A}) \cap D(\mathbf{B})$$

Falls einer der Operatoren beschränkt ist ($D(\mathbf{A}) = \mathcal{H}$), so ist natürlich $D(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = D(\mathbf{B})$.

6.1 Spektrum von Operatoren

Im Hinblick auf die Quantenmechanik wollen wir nun darauf hinarbeiten das Spektrum von Operatoren zu definieren. Im endlichdimensionalen Fall verläuft alles analog zur Linearen Algebra (HM I/II), aber in der allgemeinen Spektratheorie kann es zu Problemen kommen, wie im Folgenden klar werden soll. Zur Erinnerung:

Satz 6.1. ***Invertierbarkeit einer linearen Abbildung:***
Eine lineare Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *mit einer* $m \times n$ *Matrix* A *ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist.*

Satz 6.2. ***Laplacescher Entwicklungssatz:***
Für die Determinanten einer $n \times n$ *Matrix gilt:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+1} A_{ij} \det(D_{ij}),$$

wobei es egal ist ob i *über die Zeilen oder die Spalten läuft und* D_{ij} *die Matrix* A *ohne die* i*-te Zeile und* j*-te Spalte ist.*

Man kann die Determinante größerer Matritzen auch mit dem **Gauß-Algorythmus** berechnen. Dabei muss allerdings, bei teilen einer Zeile/Spalte durch einen Faktor a die Determinante mit a multipliziert werden.

Definition 6.2.
Sei $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ *ein unbeschränkter Operator auf* $\mathcal{H}$*. Dann heißt* $\mathbf{A}$ ***injektiv****, wenn*

$$\mathbf{A}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Er heißt ***surjektiv****, wenn für alle* $y \in \mathcal{H}$ *ein* $x \in D(\mathbf{A})$ *existiert, sodass* $\mathbf{A}x = y$*, also jedes Element des Zielbereichs getroffen wird. Operatoren die injektiv und surjektiv sind heißen* ***invertierbar****.*

Aufgrund der Linearität genügt es hier dies für die 0 anzunehmen. Zu einem injektiven Operator findet man eine Umkehrabbildung. Jetzt geht es in Richtung Eigenwertgleichung:

Definition 6.3. ***Resolventenmenge und Spektrum:***
Zu einem unbeschränkten Operator $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ *bezeichnen wir*

$$\rho(\mathbf{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad (\lambda \mathbf{1} - \mathbf{A}) \quad \textit{invertierbar}\}$$

als die ***Resolventenmenge****. Die Menge* $\sigma(\mathbf{A}) := \mathbb{C} \setminus \rho(\mathbf{A})$ *bezeichnen wir als das* ***Spektrum*** *von* $\mathbf{A}$*.*

Invertierbarkeit
Man weiß von einem Operator $||\mathbf{A}|| < 1$, dass gilt (**Neumannreihe**):

$$\boxed{||\mathbf{A}|| < 1\,, \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{1}-\mathbf{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n}$$

Für das Produkt zweier Operatoren gilt:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Definition 6.4. ***Eigenwert***
Wir bezeichnen $\Lambda \in \mathbb{C}$ als Eigenwert eines Operators $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ falls ein $x \in \mathbf{A} \neq 0$ existiert, sodass:

$$(\mathbf{A} - \Lambda \mathbf{1})x = 0\,.$$

Das heißt, dass **Eigenwerte** zu $\mathbf{A}$ im Spektrum liegen. Umgekehrt gibt es aber Elemente im Spektrum, die **keine Eigenwerte** sind. So hat z.B. der Ortsoperator eingeschränkt auf das Intervall $[0,1]$ die Eigenwertgleichung:

$$(x - \Lambda)f(x) = 0\,, \quad \forall\ x$$

Das heißt, dass $f(x) = 0\ \ \forall\ x \neq \Lambda$. Das darf aber nicht gelten, da auf dem L^2 Funktionen, die bis auf Nullmengen identisch sind, äquivalent sind. Das heißt f ist de facto die Nullfunktion, was unzulässig ist. Das heißt dieser Operator keine Eigenwerte hat. Trotzdem aber hat der Operator ein nichtleeres Spektrum. Z.B. die Zahl 0 liegt im Spektrum, da $\hat{x}$ auf $L^2([0,1]) = \mathcal{H}$ nicht surjektiv ist. Z.B. für die Funktion $\sqrt{x} \in \mathcal{H}$ ist die Umkehrabbildung zum Ortsoperator $1/\sqrt{y} \neq \mathcal{H}$.

Definition 6.5. ***Abgeschlossenheit:***
Sei $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ ein unbeschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann bezeichnen wir

$$G(\mathbf{A}) := \{(x, \mathbf{A}x) : x \in D(\mathbf{A})\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

als ***Graphen*** *von $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$. Wir nennen den Operator* ***abgeschlossen****, falls $G(\mathbf{A})$ abgeschlossen ist in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

Satz 6.3.
Ein Operator $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ ist abgeschlossen, falls für jede Folge $x_n \to x$ und Bilder $\mathbf{A}x_n \to y$, $x_n \in D(\mathbf{A})$, folgt $y = \mathbf{A}x$.

Man kann sogar zeigen, dass ein abgeschlossener Operator, der auf einem gesamten Hilbertraum definiert ist automatisch beschränkt ist. Zudem gilt:

$$\rho(\mathbf{A}) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \ \text{ ist abgeschlossen.}$$

Das bedeutet natürlich in der Umkehrung, dass **nicht abgeschlossene Operatoren ein Spektrum $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}$ besitzen**. Es lässt sich zusätzlich, die besonders für Beispielaufgaben hilfreiche Aussage, zeigen:

Satz 6.4. ***Spektrum beschränkter Operatoren:***
Das Spektrum eines beschränkten Operators $\mathbf{A}$ *ist*

- ***abgeschlossen***
- *und* ***beschränkt*** *durch:* $\forall\ \lambda \in \sigma(\mathbf{A}) :\ |\lambda| \leq ||\mathbf{A}||$.
- *Wenn* λ *eine Eigenwert zu* $\mathbf{A}$ *ist, so ist* λ^* *im Spektrum von* $\mathbf{A}^\dagger$*. (Wird später wichtig.)*

6.2 Symmetrische Operatoren

Definition 6.6. ***Symmetrischer Operator:***
Ein unbeschränkter Operator $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ *auf einem Hilbertraum* $\mathcal{H} \supset D(\mathbf{A})$ *heißt symmetrisch, wenn gilt:*

$$\langle x\,|\mathbf{A}y\rangle = \langle \mathbf{A}x\,|y\rangle\,,\quad \forall\quad x, y \in D(\mathbf{A})\,.$$

Man kann leicht zeigen, dass, dass Eigenwerte symmetrischer Operatoren reell sind. Nun ist die Frage, ob aus der Symmetrie auch folgt, dass das Spektrum auch eine Teilmenge der reellen Zahlen ist. Dies ist aber i.A. *nicht* der Fall, als Beispiel kann man den Impulsoperator betrachten.

Lemma 6.1.
Sei $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ *ein symmetrischer Operator. Dann gilt für* $\Lambda \in \mathbb{C}$

$$||(\Lambda - \mathbf{A})x|| \geq |\mathrm{Im}(\Lambda)| \cdot ||x||\,,\ \forall\ x \in D(\mathbf{A})$$

Beweis.
Sei $x \in D(\mathbf{A})$. Aus der Symmetrie folgt sofort: $\langle \mathbf{A}x\,|x\rangle = \langle x\,|\mathbf{A}x\rangle = \langle \mathbf{A}x\,|x\rangle^*$. Also ist $\langle \mathbf{A}x\,|x\rangle \in \mathbb{R}$. Es gilt aber außerdem $\mathrm{Im}\left(\langle x\,|\mathbf{A} - \Lambda|x\rangle\right) = \mathrm{Im}\left(\Lambda||x||^2 - \langle x\,|\mathbf{A}x\rangle\right) = \mathrm{Im}(\Lambda)\cdot||x||^2$. Da der Imaginärteil einer komplexen Zahl immer kleiner ist als der Betrag kann man abschätzen:

$$||x||^2 \cdot |\mathrm{Im}(\Lambda)| \leq ||\langle x\,|\Lambda - \mathbf{A}|x\rangle|| \underbrace{\leq}_{C.S.} ||x|| \cdot ||(\Lambda - \mathbf{A})x||$$

□

Falls also $\Lambda \notin \mathbb{R}$, dann ist $(\Lambda - \mathbf{A}) : D(\mathbf{A}) \to \mathcal{H}$ auf jeden Fall injektiv. Also ist sogar, falls $\Lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, äquivalent:

$$\Lambda \in \rho(\mathbf{A}) \quad \Leftrightarrow \quad (\Lambda - \mathbf{A}) : D(\mathbf{A}) \to \mathcal{H}\ \text{ ist surjektiv.}$$

Man kann zudem beweisen, dass aus $\Lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit Surjektivität wie oben folgt, dass $D(\mathbf{A})$ **dicht** liegt in $\mathcal{H}$.

Satz 6.5.
Sei $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ *ein symmetrischer Operator. Dann ist das Spektrum* $\sigma(\mathbf{A})$

- *eine abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen,*
- *oder ganz* $\mathbb{C}$*,*
- *oder die obere/unter Halbmenge der komplexen Ebene.*

Die Eigenwerte sind ***reell****.*

Im endlich dimensionalen Fall sind alle Elemente des Spektrums auch Eigenwerte, woraus sofort der erste Fall folgt. Man kann die Resolventenmenge auch über eine direkte Abbildung konstruieren:

Definition 6.7. ***Resolvente:***
Wir bezeichnen die Resolvente zu einem Operator $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ *mit:*

$$R(\cdot, \mathbf{A}) : \rho(\mathbf{A}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,, \ \Lambda \mapsto R(\Lambda, \mathbf{A}) = (\Lambda - \mathbf{A})^{-1} \,.$$

Falls $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ symmetrisch ist und $\Lambda - \mathbf{A}$ surjektiv ist kann man zudem zeigen, dass aus $\mathrm{Im}(\Lambda) > 0$, dann ist die obere Halbebene Teilmenge der Resolventenmenge.

6.3 Selbstadjungierte Operatoren

Definition 6.8. ***Adjungierter Operator:***
Sei $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ *ein Operator mit* $D(\mathbf{A})$ *dicht in* $\mathcal{H}$*. Dann ist der adjungierte Operator* $\mathbf{A}^\dagger$ *(die Adjungierte) definiert als:*

(*i*) *Definitionsbereich:*

$$D(\mathbf{A}^\dagger) := \{x \in \mathcal{H} \ \text{ es existiert } \ y \in \mathcal{H} \ \text{ s.d. } \ \langle x \,|\mathbf{A}z\rangle = \langle y\,|z\rangle\}$$

für alle $z \in D(\mathbf{A})$*.*

(*ii*) *Abbildungsvorschrift: Man kann zeigen, dass dieses* y *eindeutig ist und wir bezeichnen es mit:*

$$\mathbf{A}^\dagger x := y$$

Definition 6.9. ***Selbstadjungierter Operator:***
Sei $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ *ein Operator mit* $D(\mathbf{A})$ *dicht in* $\mathcal{H}$*. Dann heißt dieser Operator selbstadjungiert, falls* $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A})) = (\mathbf{A}^\dagger, D(\mathbf{A}^\dagger))$*.*

Das bedeutet, dass $\mathbf{A}$ automatisch auch symmetrisch ist: $\langle x\,|\mathbf{A}z\rangle = \langle \mathbf{A}^\dagger x\,|z\rangle = \langle \mathbf{A}x\,|z\rangle$. Für jedes $x \in D(\mathbf{A}^\dagger)$ ist zudem die Abbildung $\varphi : D(\mathbf{A}) \to \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \langle x\,|\mathbf{A}z\rangle$ beschränkt. Man kann dies mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zeigen. Da aber $D(\mathbf{A})$ dicht ist in $\mathcal{H}$ existiert eine **stetige Fortsetzung** dieser Abbildung! Da jeder selbstadjungierte Operator auch symmetrisch ist gelten für sein Spektrum die selben Aussagen.

6.4 Charakterisierung von Selbstadjungiertheit

Satz 6.6.
Sei $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ ein unbeschränkter, symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathbf{A}$ *selbstadjungiert.*

(ii) $\mathbf{A}$ *abgeschlossen, dicht definiert ($D(\mathbf{A})$ ist dicht in $\mathcal{H}$) und*

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}^\dagger \pm \mathrm{i}) = \{0\}$$

(iii) $\mathrm{Bild}(\mathbf{A} \pm \mathrm{i}) = \mathcal{H}$ *(der Gesamte Hilbertraum).*

Mit dieser Charakterisirung folgt das wichtige Ergebnis, auf das wir im Zwecke der Postulate der Quantenmechanik hingearbeitet haben:

Satz 6.7. ***Spektrum selbstadjungierter Operatoren:***
Sei $(\mathbf{A}, D(\mathbf{A}))$ ein unbeschränkter, dicht definierter, symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gilt:

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \ \text{ selbstadjungiert}$$

6.5 Spektralsatz

Ein weiteres extrem wichtiges Ergebnis ist der Spektralsatz. Im n-dimensionalen Fall ist aus der HöMa II bekannt, dass symmetrische Operatoren/Matritzen von $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ n reelle Eigenwerte besitzt und die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ darstellen. Das bedeutet, dass eine Spektraldarstellung mittels des Tesnsorproduktes formulierbar ist:

$$\mathbf{A} = \sum_{i,\mu} \Lambda_i v_{i,\mu} \otimes v_{i,\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}x = \sum_{i,\mu} \Lambda_i (v_{i,\mu} \cdot x)\, v_{i,\mu}$$

μ beschreibt hierbei die Entartung. Eine ähnliche Darstellung existiert auch für selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum. Man kann zeigen, dass ein **Maß** existiert, mit dem man Projektionen wie $v_i \otimes v_i$ auch auf Spektren erweitern kann. Die Wirkung wird dann beschrieben durch, mit $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$:

$$\langle y\,|\mathbf{A}x\rangle = \int \lambda \,\mathrm{d}\langle y\,|P(\lambda)x\rangle$$

In der mathematisch lockereren Dirac-Notation der Quantenmechanik schreibt man[4]

$$\hat{A} = \sum_{i,\mu} \lambda_i |\lambda_i, \mu\rangle\, \langle\lambda_i, \mu| + \int \mathrm{d}\lambda \int \mathrm{d}\mu\, \lambda |\lambda, \mu\rangle\, \langle\lambda, \mu| \doteq \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\lambda,\mu} \lambda_i |\lambda_i, \mu\rangle\, \langle\lambda_i, \mu|\,.$$

[4]Vgl. Theoretische Physik III